مثال‌ها

مثال) قوانین براکتی زیر را ثابت کنید.

1) $\forall n \in \mathbb{Z} \;\; ; \;\; [x+n]=[x]+n$

2) $[x+[x]]=2[x]$

3) $\left[\underbrace{x+[x+[x+\cdots]}_{\text{بار } n}\right]=n[x]$

4) $[x-[x]]=0$

5) $\begin{cases} 0 \le x-[x] < 1 & (\mathrm{I}) \\ [x] \le x < [x]+1 & (\mathrm{II}) \\ x-1 < [x] \le x & (\mathrm{III}) \end{cases}$

6) $[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & ; \; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; \; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

7) $if \;\; x > y \Rightarrow [x] \ge [y] \quad , \quad [x] > [y] \Rightarrow x > y$

8) $[nx] \ge n[x]$ (عدد طبیعی یا صفر n)

9) $\forall x,y \in \mathbb{R} \; ; \; [x+y] \ge [x]+[y]$

10) $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \; ; \; \left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right]$

11) $\forall n \in \mathbb{Z} \;\; : \;\; \left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases} \frac{n}{2} & ; \; n=2k \\ \frac{n-1}{2} & ; \; n=2k+1 \end{cases}$

12) $[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$

13) $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=\{2x\}+\frac{1}{2}$

14) $\forall \; k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \;\; : \;\; k[x] \le [kx] \le k[x]+(k-1)$

15) $\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1$

مثال16) اگر $y=x-n\left[\frac{x}{n}\right]$ باشد، حدود y را مشخص کنید .

مثال17) اگر n بر k بخش پذیر نباشد $\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]$ برابر چه عددی است ؟ $(n,k \in \mathbb{N})$

مثال‌ها

مثال18) m و n عددهای صحیح و غیر منفی اند ، ثابت کنید نتیجه کسر $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ عددی صحیح است .

مثال19) ثابت کنید ، اگر برای عدد طبیعی n تساوی زیر برقرار باشد :

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]=2+\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right]$$

آن وقت n عددی اول است.

مثال20) همهٔ مقدارهای حقیقی x را پیدا کنید که به ازاء هر کدام از آنها عبارت $\dfrac{x}{x^2-5x+7}$ برابر با عددی صحیح باشد .

مثال21) اگر m و n دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول باشند در ضمن $m>1$ مجموع زیر را حساب کنید .

$$\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{2m}{n}\right\}+\cdots+\left\{(n-1).\frac{m}{n}\right\}+\{m\}$$

مثال22) مجموع $\cdots+\left[\dfrac{x+1}{2}\right]+\left[\dfrac{x+2}{4}\right]+\left[\dfrac{x+4}{8}\right]+\left[\dfrac{x+8}{16}\right]+\cdots+\left[\dfrac{x+2^{n-1}}{2^n}\right]+\cdots$ را محاسبه کنید .

مثال23) بخش صحیح عبارت $a_n=\sqrt{1366+\sqrt{1366+\sqrt{1366+\cdots+\sqrt{1366}}}}$ رابیابید . (عدد 1366، n بارتکرار شده است)

مثال24) عددهای اولی را پیدا کنید که در معادله $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{x^2-1}\right]=y$ صدق کند .

مثال) دستگاههای زیر را حل کنید.

25) $\begin{cases}2[x]+3[y]=8\\3[x]-[y]=1\end{cases}$

26) $\begin{cases}[x+y+4]=18-y\\[x+1]+[y-1]=18-x-y\end{cases}$

27) $\begin{cases}[x]+[y-2]=5-x\\[x+3]=-x-y+6\end{cases}$

مثال‌ها

مثال28) مجموع $S_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}.n$ را محاسبه کنید.

مثال29) اگر $[4x]=\left[2\left(x^2+1\right)\right]$ آنگاه $\left[(x+1)^2\right]$ را بیابید .

مثال30) اگر $\left(1+\sqrt{2}\right)^6+\left(1-\sqrt{2}\right)^2=198$ باشد ، جزء صحیح عدد $\left(1+\sqrt{2}\right)^6$ چقدراست؟

مثال) تساوی های زیر را ثابت کنید:

31) $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{15}\right]=34$

32) $\left[\dfrac{\sqrt{130}}{11}\right]=1$

33) $\left[\log_2 x-\log_2[x]\right]=\left[\log_2 x\right]-\left[\log_2[x]\right]$

34) $\left[\dfrac{2x^2+3}{x^2+3}\right]=1$

35) $\left[\dfrac{\sqrt{175}}{4}\right]=3$

36) $\left[\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)^m\right]=\begin{cases}0 & ; \quad m=2k\\ -1 & ; \quad m=2k+1\end{cases}\ ; m,n\in\mathbb{N}$

37) $\left[\sqrt{4}\right]+\left[\sqrt{5}\right]+\left[\sqrt{6}\right]+\left[\sqrt{7}\right]+\left[\sqrt{8}\right]=10$

38) $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^4\right]=193$

39) $S=\left[\sqrt{64}\right]+\left[\sqrt{65}\right]+\left[\sqrt{66}\right]+\cdots+\left[\sqrt{80}\right]=136$

40) $A=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\cdots+\left[\sqrt{15}\right]=34$

41) $T=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{625}\right]=10125$

42) $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right]=\left[\sqrt{9n+8}\right];(n\geq 0,n\in\mathbb{Z})$

مثال‌ها

43) $\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+4}{8}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=n$

44) $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right] \quad (n\in\mathbb{N})$

45) $S=\left[\sqrt{81}\right]+\left[\sqrt{82}\right]+\cdots+\left[\sqrt{99}\right]=171$

46) $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right] \quad ; \quad (n\in\mathbb{Z}, n\geq 0)$

47) $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}+\frac{(-1)^n-1}{4}, n\in\mathbb{Z}$

48) $\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{-n}{2}\right]=n\ , n\in\mathbb{Z}$

مثال49) آیا به ازای مقادیر ی از α و هر مقدار طبیعی n تساوی $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+\alpha}\right]$ برقرار است ؟

مثال50) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم : $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=n$

مثال51) عدد $1993!$ به چند صفر ختم می شود؟

مثال52) ثابت کنید بازاء هر دو عدد حقیقی x و y ، $[2x]+[2y]\geq[x]+[y]+[x+y]$.

مثال53) ثابت کنید برای همۀعددهای حقیقی x داریم: $\left|x-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right|\leq\frac{1}{2}$

مثال54) اگر $[12x]=\left[2\left(x^2+9\right)\right]$ آنگاه $\left[(x+3)^2\right]$ را محاسبه کنید .