

مثالها

**مثال** با رسم نمودار توابع زیر ، پیوستگی آنها را در نقطه داده شده بررسی می کنیم:

$$1) f(x) = \frac{1}{x} ; x=0$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 + x & ; x \leq 0 \\ x^2 - x & ; x > 0 \end{cases} ; x=0$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x \leq -1 \\ x+1 & ; x > -1 \end{cases} ; x=-1$$

$$4) f(x) = [x] ; x \in [-1, 1], x=-1$$

**مثال** پیوستگی هریک از تابعهای زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

$$5) f(x) = 2x^2 - 5x + 1 , (x=2)$$

$$6) f(x) = \frac{2x^2 + x}{x-2} , x=-2$$

$$7) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} , x=-1$$

$$8) f(x) = \frac{x+2}{2x-3} , x=3$$

$$9) f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x & ; x > -\frac{3}{2} \\ -2x + 3 & ; x < -\frac{3}{2} \end{cases} , x = -\frac{3}{2}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & ; x > 3 \\ 2 & ; x = 3 \\ 5x - 13 & ; x < 3 \end{cases} , (x=3)$$

$$11) f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 1} & ; x \geq 0 \\ (2x-1)^2 & ; x < 0 \end{cases} , x=0$$

$$12) f(x) = \begin{cases} \sin 2x & ; x > \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2} + \cos^2 x & ; x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} , x = \frac{\pi}{4}$$

$$13) f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & ; x \geq \frac{\pi}{2} \\ 2 \sin^2 x - 1 & ; x < \frac{\pi}{2} \end{cases} , x = \frac{\pi}{2}$$

$$14) f(x) = \sqrt{1-x} ; x=1$$

مثالها

15)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  ;  $x = -2$

16)  $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$  ;  $x = 0$

مثال 17) اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & ; x > -2 \\ 13 & ; x = -2 \\ 2ax^2 + bx - 1 & ; x < -2 \end{cases}$  در نقطه  $x = -2$  پیوسته باشد، مقدارهای  $a$  و  $b$  را پیدا کنید.

مثال 18) تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$  مفروض است. مقدار  $a$  را طوری پیدا کنید که  $f$  در  $x = 0$  پیوسته باشد.

مثال 19) مقدار  $a$  را طوری پیدا کنید که  $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & ; x \leq 1 \\ x - 2a & ; x > 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  پیوسته باشد.

مثال 20) مقدار  $a$  را طوری پیدا کنید که  $f(x) = \begin{cases} -2x + a & ; x \geq 1 \\ x^2 + 3x & ; x < 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  پیوسته نباشد.

مثال 21) نمودار یک تابع را رسم کنید که در دو نقطه صفر و ۱ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

مثال) پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

22)  $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$

23)  $f(x) = \begin{cases} |x| & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$

24)  $f(x) = [x] + [4 - x]$  ;  $x = 3$

25)  $f(x) = [1 - x^2]$  ;  $x = 0$

26)  $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$

27)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; x \neq -1 \\ 1 & ; x = -1 \end{cases}$

مثالها

$$28) f(x) = \begin{cases} 2 + 10^{\frac{1}{x}} & ; x < 0 \\ 2 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$29) f(x) = \frac{x-1}{x^3-1} ; x=1$$

$$30) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & ; x \neq 0 \\ -1 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$31) f(x) = x \sin \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{x^2+3x} ; x=0$$

$$32) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{2x^2+1} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$33) f(x) = [x] ; x=1.7$$

$$34) f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$35) f(x) = \frac{1}{1+|x|} ; x=0$$

$$36) f(x) = [x + [x]][1 - x + [x]] ; x=0$$

$$37) g(x) = \sqrt{1 - \cos x} ; x=0$$

**مثال 38)** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \\ -1 & ; x = 0 \end{cases}$  مفروض است، پیوستگی  $|f|$  را بررسی کنید.

**مثال 39)** پیوستگی تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi(x-2)} & ; x \neq 2 \\ 1 & ; x = 2 \end{cases}$  را در  $x=2$  بررسی کنید.

**مثال 40)** پیوستگی تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$  را در  $x=0$  بررسی کنید.

مثال‌ها

**مثال 41** تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & ; [x] = 2k \\ |x - [x + 1]| & ; [x] = 2k + 1 \end{cases}$  مفروض است، آیا این تابع در نقطه  $x = 2$  پیوسته است؟

**مثال 42** آیا تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^{[\sin x]} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$  در  $x = \frac{\pi}{2}$  پیوسته است؟

**مثال 43** پیوستگی تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^n}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} & ; x \neq 1 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$  را در  $x = 1$  بررسی کنید. ( $n \in \mathbb{N}$ )

**مثال 44** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} |x-1| & ; |x| > 1 \\ \cos \frac{\pi x}{2} & ; |x| \leq 1 \end{cases}$  مفروض است، پیوستگی تابع را در نقاط  $x = 1$  و  $x = -1$  بررسی کنید.

**مثال 45** اگر  $f(x) = \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{1 + \cos 2x}$  باشد و تابع  $f$  در  $x = \frac{\pi}{2}$  پیوسته باشد،  $f(\frac{\pi}{2})$  را بدست آورید.

**مثال 46** تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \\ -1 & ; x = 0 \end{cases}$  مفروض است، کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

- (1)  $f$  در نقطه  $x = 0$  حد دارد.      (2)  $|f(x)|$  در صفر حد دارد ولی پیوسته نیست.
- (3)  $|f(x)|$  در  $x = 0$  حد ندارد.      (4)  $|f(x)|$  در  $x = 0$  پیوسته است.

**مثال 47** توابع  $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$  مفروضند، کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x) = 1$       (2)  $f+g$  در  $x = 1$  پیوسته نیست.
- (3)  $f+g$  در  $x = 1$  پیوسته است.      (4)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g) = 1$

مثالها

**مثال 48)** فرض کنیم توابع  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  و  $g(x) = x + 1$  مفروض باشند ، کدامیک از عبارات زیر نادرست است ؟

(1)  $f$  در  $x = 1$  تعریف نشده

(2)  $f(x) = g(x)$  ,  $x \neq 1$

(3)  $f(x) = g(x)$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

**مثال 49)** تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \notin Z \\ 0 & ; x \in Z \end{cases}$  مفروض است کدام گزینه درست نیست .

(1)  $f$  در تمام نقاط حد دارد .

(2)  $f$  فقط به ازاء هر  $x$  صحیح ( $x \in Z$ ) حد دارد.

(3)  $f$  در تمام نقاط غیر صحیح ( $x \notin Z$ ) پیوسته است .

(4)  $f$  در تمام نقاط صحیح ( $x \in Z$ ) دارای ناپیوستگی رفع شدنی است.

**مثال 50)** تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in Q \\ -1 & ; x \notin Q \end{cases}$  را در نظر می گیریم، تابع  $\alpha(x) = [f(x)]^2$  چگونه است ؟

(1) همواره پیوسته

(2) همواره ناپیوسته

(3) اگر  $x$  گویا باشد پیوسته است

(4) اگر  $x$  گنگ باشد پیوسته است

**مثال 51)** تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = [x + [x + [x]]]$  در کدام نقطه زیر پیوسته است ؟

(1) 0

(2) 1

(3) 2

(4)  $\pi$

**مثال 52)** تابع  $f : R \rightarrow R$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x & ; x \in Q \\ -x^2 & ; x \notin Q \end{cases}$  مفروض است ، کدام گزینه درست است ؟

(1) این تابع در هیچ نقطه پیوسته نیست .

(2) این تابع در صفر پیوسته است .

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$  ، اگر  $x$  اصم باشد .

(4) این تابع در صفر تعریف نشده است .

**مثال 53)** تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x \text{Arc sin}[x]$  مفروض است ، کدام گزینه صحیح است ؟

(1) در  $x = 1$  پیوسته است .

(2) در  $x = 2$  پیوستگی چپ دارد .

(3) در  $x = -1$  پیوستگی چپ دارد .

(4) در  $x = 0$  پیوسته است .

## مثال‌ها

**مثال 54** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} [x+1] \sin \frac{1}{x} & ; x \in (-1,0) \cup (0,1) \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$  در نقطه صفر:

- (1) پیوستگی راست دارد .  
 (2) حد دارد ولی پیوسته نیست .  
 (3) پیوستگی چپ دارد .  
 (4) پیوسته است .

**مثال 55** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x - [x] & ; [x] = 2k \\ x - [x] + 1 & ; [x] = 2k + 1 \end{cases}$  در کدام نقطه پیوسته است؟

- (1)  $x = 0$  (2)  $x = 1$  (3)  $x = 2$  (4)  $x = 4$

**مثال 56** تابع با ضابطه  $f(x) = |[x+2]| + |[x-2]|$  در  $x = 2$ :

- (1) پیوسته است .  
 (2) پیوسته نیست .  
 (3) فقط پیوستگی راست دارد .  
 (4) فقط پیوستگی چپ دارد .

**مثال 57** تابع با ضابطه  $f(x) = [x] - [-x]$  در  $x = 2$ :

- (1) پیوسته است .  
 (2) پیوستگی راست دارد .  
 (3) پیوستگی چپ دارد .  
 (4) ناپیوسته است .

**مثال 58** تابع با ضابطه  $f(x) = |x + [x]| + |x - [x]|$  مفروض است ، کدام گزینه همواره صحیح است؟

- (1)  $f$  در  $R$  پیوسته است .  
 (2) در نقاط صحیح ناپیوسته است .  
 (3) در نقاط صحیح نامنفی ناپیوسته است .  
 (4) در نقاط صحیح نامثبت ناپیوسته است .

**مثال 59** تابع با ضابطه  $f(x) = [x] |\sin \pi x|$  مفروض است ، کدام گزینه صحیح است؟

- (1) تابع در تمام نقاط صحیح ناپیوسته است .  
 (2) تابع فقط در  $x = 0$  ناپیوسته است .  
 (3) در تمام نقاط صحیح پیوستگی راست دارد ، اما پیوسته نمی باشد .  
 (4) تابع در تمام نقاط صحیح پیوسته است .

مثال‌ها

**مثال 60** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 & ; [x] = 2k \\ 4 & ; [x] = 2k + 1 \end{cases}$  مفروض است، کدام گزینه صحیح است؟

- (1) در نقاط صحیح پیوستگی راست دارد.
- (2) در نقاط صحیح پیوستگی چپ دارد.
- (3) در نقاط  $x = 2n - 1$ ،  $n \in \mathbb{Z}$ ، پیوستگی چپ دارد.
- (4) در نقاط  $x = 2n$ ،  $n \in \mathbb{Z}$ ، پیوستگی چپ دارد.

**مثال 61**  $f$  تابعی فرد و در نقطه  $x = 0$  از چپ پیوسته است، کدام همواره گزینه صحیح است؟

- (1) اگر  $f(0) \neq 0$  آنگاه در  $x = 0$  پیوسته است.
- (2) حتماً  $f(0) = 0$  و در  $x = 0$  پیوسته است.
- (3) ممکن است در  $x = 0$  پیوسته باشد یا نباشد.
- (4) در  $x = 0$  حتماً حد دارد اما ممکن است پیوسته باشد یا نباشد.

**مثال 62** تابع با ضابطه  $f(x) = \text{Arc tan} \frac{1}{[x]}$  در کدام نقطه پیوسته است؟

- |             |                       |
|-------------|-----------------------|
| (1) $x = 1$ | (2) $x = 2$           |
| (3) $x = 2$ | (4) $x = \frac{3}{2}$ |

**مثال 63**  $f: \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته است به طوری که به ازای هر  $x$  گویا،  $f(x)$  گویا و به ازای هر  $x$  اصم،  $f(x)$  اصم است، کدام گزینه

همواره صحیح است؟

(2) تمام توابع کثیرالجزءه جواب مساله است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ x & ; x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad (4)$$

(3)  $f$  تابعی ثابت است.

مثال‌ها

**مثال 64** اگر تابع  $f$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته و  $g(0) = 0$  و به ازای هر  $x$  از یک همسایگی صفر  $f$  تعریف شده و  $|f(x)| \leq |g(x)|$

آنگاه کدام صحیح است؟

- (1)  $f$  ممکن است در  $x = 0$  ناپیوسته باشد.
- (2)  $f$  در  $x = 0$  دارای حد است اما پیوسته نیست.
- (3)  $f$  در صفر پیوسته است و  $f(0) = 0$ .
- (4)  $f$  در صفر پیوسته است و  $f(0) > 0$  است.

**مثال 65** تابع  $g$  به ازای هر  $x$  حقیقی تعریف شده، اما در هیچ نقطه‌ای پیوسته نمی‌باشد و  $|g(x)| \leq 1$  در این صورت کدام تابع زیر در

$x = a$  پیوسته است؟

- (1)  $f(x) = g(x) \cdot \cos(x - a)$
- (2)  $f(x) = [x - a]g(x)$
- (3)  $f(x) = g(x)(2x - a) \sin \frac{1}{x - a}$
- (4)  $f(x) = g(x) \sin(x - a)$

**مثال 66**  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{a|x|}{x} + 2 & ; x > 0 \\ 5 & ; x = 0 \\ b[x] + 1 & ; x < 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  پیوسته باشد.

**مثال 67** به ازاء چه مقدار  $k$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} k[-x] & ; x \geq 1 \\ \sqrt{(x-1)^2} & ; x < 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  پیوستگی چه دارد؟

**مثال 68** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^{\lfloor \cos x \rfloor} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$  به ازاء چه مقدار  $a$  در  $x = 0$  پیوسته است؟

**مثال 69** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{b \sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} & ; x > 0 \\ a[x] + 1 & ; x \leq 0 \end{cases}$  مفروض است، به ازاء چه مقدار  $a$  و  $b$  این تابع در  $x = 0$  پیوسته است؟



مثال‌ها

**مثال 70)** به ازای چه مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 \left[ \frac{1}{x} \right] & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  پیوسته است؟

**مثال 71)** تابع با ضابطه  $f(x) = a[x] + [4-x]$  مفروض است، به ازای چه مقدار  $a$  تابع در  $x = 3$  پیوسته است؟

**مثال 72)** اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{[x^2] - x^2}{1 - \cos x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  پیوسته باشد،  $a$  چقدر است؟

**مثال 73)** به ازای چه مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x(-1)^{\left[ \frac{1}{x} \right]} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته است؟

**مثال 74)** به ازای چه مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a & ; x = 0 \\ \frac{x}{x^2 + \sin x} & ; x \neq 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  پیوسته است؟

**مثال 75)** به ازای چه مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} (-1)^{\left[ \frac{1}{x} \right]} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  پیوسته است؟

**مثال 76)** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^2} \sin 2x^2 & ; x < 0 \\ \frac{x^2 + 2x + c}{1 - 3x^2} & ; x \geq 0 \end{cases}$  به ازای چه مقدار  $c$  در  $x = 0$  پیوسته است؟

**مثال 77)** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} - 4 & ; x > 0 \\ b + \left[ x - \frac{7}{2} \right] & ; x = 0 \\ [x] + 4 & ; x < 0 \end{cases}$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته باشد،

مقادیر عددی  $a$  و  $b$  را بیابید.

مثالها

مثال 78) تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b|x| & ; x < 1 \\ [x] & ; x = 1 \\ a \sin(x-1) + b & ; x > 1 \end{cases}$  مفروض است، اگر این تابع در نقطه  $x=1$  پیوسته باشد،  $a$  و  $b$  را بدست

آورید.

مثال 79) تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} [x] + a & ; x < 0 \\ x \cot \frac{x}{2} & ; x > 0 \\ |x-1| + b & ; x = 0 \end{cases}$  مفروض است، اگر این تابع در  $x=0$  پیوسته باشد،  $a$  و  $b$  را بدست آورید.

مثال 80) تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x + [x] + 3 & ; x < 0 \\ 2 & ; x = 0 \\ \frac{k \sin 2x}{\text{Arc tan}(x\sqrt{2})} & ; x > 0 \end{cases}$  مفروض است،  $k$  را طوری بیابید که تابع در  $x=0$  پیوسته باشد.

مثال 81) تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{a \cos \frac{\pi}{2} x}{\pi(x-1)} & ; x < 1 \\ b \sin \frac{\pi[x]}{2} + \frac{a}{\pi} \text{Arc tan} \frac{1}{x-1} & ; x > 1 \\ 2 & ; x = 1 \end{cases}$  به ازاء چه مقادیر  $a$  و  $b$  در  $x=1$  پیوسته است؟

مثال 82)  $a$  را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^n \text{Arc tan} \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$  در نقطه  $x=0$  پیوسته باشد؟ ( $n \in N$ )

مثال 83) تابع با ضابطه  $f(x) = (x^2 - ax + b)[x^3]$  در  $x=1$ ،  $x=2$  پیوسته است،  $a+b$  را بیابید.

مثالها

**مثال 84** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{Arc} \tan \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ a[x] - 1 & ; x \leq 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  در صورتی پیوسته است که:

(1)  $a = -1$

(2)  $a = 0$

(3) به ازای هیچ مقدار  $a$  پیوسته نیست.

(4)  $a = 1$

**مثال 85** اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 - x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ [a] - 1 & ; x = 0 \end{cases}$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

(1)  $[0,1)$

(2)  $[1,2)$

(3)  $[2,3)$

(4)  $[3,4)$

**مثال 86** اگر یک تابع فرد باشد و در نقطه  $x = 0$  از راست پیوسته باشد :  
الف) نشان دهید که  $f(0) = 0$ .  
ب) تابع در این نقطه پیوسته است.

**مثال 87** اگر یک تابع زوج باشد و در نقطه  $x = 0$  از راست پیوسته باشد، نشان دهید که از طرف چپ هم در نقطه  $x = 0$  پیوسته است.

**مثال 88** تابع  $f$  به معادله  $f(x) = (a^2 - 4a)[x] + 3[x] + 4x$  مفروض است، به ازاء چه مقدار یا مقادیری از  $a$  این تابع در  $R$  پیوسته است؟

**مثال 89** تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{\left[ \sin^2 \frac{\pi}{2} x \right]}$  مفروض است، این تابع در چه نقاطی تعریف شده، آیا در این نقاط پیوسته است؟

**مثال 90** اگر  $f$  تابعی باشد که حوزه تعریف آن  $R$  است، فرض کنیم :

(1)  $f$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته است.

(2)  $\forall a, b \in R : f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$

حال نشان دهید که تابع  $f$  در هر عدد حقیقی پیوسته است.

**مثال 91** تابع  $f$  به صورت  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & ; x \notin Z \\ 0 & ; x \in Z \end{cases}$  تعریف شده است، این تابع در چه نقاطی پیوسته است؟

مثال‌ها

**مثال 92** تابع  $f$  به معادله  $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 9x^2 + 5x + 1 & ; x \notin Z \\ 1 & ; x \in Z \end{cases}$  مفروض است:

الف) این تابع در چند نقطه به طولهای صحیح پیوسته است؟

ب) آیا این تابع در نقاط به طولهای  $x = \frac{5}{4}$  ,  $x = \sqrt{2}$  پیوسته است؟

**مثال 93** تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 4 & ; x \notin Z \\ 0 & ; x \in Z \end{cases}$  تعریف شده است، این تابع در چه نقاطی پیوسته است؟

**مثال 94** به ازای چه مقادیری از  $m$  تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{(x^2 - 2(m-1)x + m + 1)(x^2 + 1)}$  در  $R$  پیوسته می باشد؟

**مثال 95** اگر تابع  $f$  به معادله  $f(x) = \sin x$  در نقطه  $x = a$  پیوسته باشد، به کمک تعریف حد ثابت کنید  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sin a$ .