

مثالها

مثال 1) ثابت کنید تابع با ضابطه $f(x) = 2x + [x]$ در فاصله $[1, 2)$ پیوسته است .

مثال 2) ثابت کنید تابع با ضابطه $f(x) = x[x] - |x-1|$ در فاصله $[1, 2)$ پیوسته است .

مثال 3) تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x^3 - x|}{x^3 + x^2 - 2x}$ مفروض است ، تحقیق کنید این تابع :

$$\begin{cases} f(0) = -\frac{1}{2} \\ f(1) = m \end{cases}$$

الف) در فاصله $[0, 1)$ پیوسته است .

ب) مقدار m را طوری تعیین کنید که تابع در فاصله $[0, 1]$ هم پیوسته باشد .

مثال 4) پیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x+1).e^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ را در فاصله $[-2, 2]$ بررسی کنید.

مثال 5) آیا تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$ در هر نقطه از فاصله $[0, 2]$ پیوسته است ؟

مثال 6) پیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x & ; -2 \leq x < -1 \\ [x]-1 & ; -1 \leq x < 0 \\ -2+x & ; 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ را در بازه $[-2, 2]$ بررسی کنید .

مثال‌ها

مثال 7 مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a - x^3 & ; -1 \leq x < 0 \\ [x] + 1 & ; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x + b & ; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ در بازه $[-1, 1]$ پیوسته باشد؟

مثال 8 تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; 0 \leq x < 5, x \notin N \\ \frac{x}{4} + 1 & ; 0 < x < 5, x \in N \\ -\sqrt{-x} & ; -1 < x < 0 \end{cases}$ پیوستگی تابع را بررسی کنید .

مثال 9 پیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$ را در دامنه تعریفش بررسی کنید .

مثال 10 تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{([x]-2)(3-[x])}$ در چند نقطه از دامنه اش ناپیوسته است؟

مثال 11 تابع با ضابطه $f(x) = x - [x] + \cos \pi [x]$ در بازه $[0, 3)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

مثال 12 اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^3 + 2x & ; 1 \leq x < 2 \\ x^3 + ax & ; 2 \leq x < 3 \end{cases}$ در فاصله $[1, 3)$ پیوسته باشد ، مقدار a را بدست آورید.

مثالها

مثال) فاصله پیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

$$13) f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-1}$$

$$14) g(x) = x^3 + \frac{x^3-x}{|x|-1}$$

$$15) f(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$16) f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{3+x}}$$

$$17) f(x) = \sqrt{|x|(x-1)}$$

$$18) f(x) = \sqrt{|x|(x^2-1)}$$

$$19) f(x) = \sqrt{([x]-2)(2-x)}$$

$$20) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$$

$$21) f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{[x]+[-x]}$$

$$22) f(x) = \text{Arc sin } \frac{1}{x}$$

مثال 23) تابع با ضابطه $f(x) = \text{Arc sin } \tan x$ در کدام فاصله همواره پیوسته است ؟

مثال‌ها

مثال 24) فرض کنیم $f(x) = \sqrt{x-1}$ در این صورت $f(\tan x)$ در چه فاصله ای پیوسته است؟

مثال 25) حداکثر مجموعه نقاط پیوستگی تابع تعریف شده به معادله $f(x) = [x]\sqrt{x \sin^2 \pi x}$ در دامنه اش کدام است؟

مثال 26) تابع $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ مفروض است، پیوستگی را در فواصل $(-\infty, 3)$ و $[-3, 3]$ بررسی کنید.

مثال 27) f تابعی اکیداً نزولی و در R پیوسته است و $f(1) = 0$ ، حداکثر فاصله پیوستگی تابع با ضابطه $g(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-3)f(x)}}$ را

بیابید.

مثال 28) اگر f در بازه $[a, b]$ و در بازه $[b, c]$ پیوسته باشد، ثابت کنید این تابع در بازه $[a, c]$ پیوسته است.

مثال 29) اگر f روی بازه $[a, b]$ کراندار و به ازای هر x_1 و x_2 که $a < x_1 \leq x_2 < b$ داشته باشیم $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$ ،

ثابت کنید f روی (a, b) پیوسته است؟

مثال 30) تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 - 3x + 2)[x]$ در کدام بازه زیر هیچ نقطه ناپیوستگی ندارد؟

(4) $[0, 4)$

(3) $[0, 3)$

(2) $(1, 3]$

(1) $(-1, 3)$

مثال 31) تابع f روی $(0, 1)$ پیوسته است هرگاه:

(1) در تعدادی نامتناهی از نقاط $(0, 1)$ پیوسته باشد.

(2) در همه نقاط $(0, 1)$ پیوسته باشد.

(3) در همه نقاط $(0, 1)$ جز تعدادی متناهی از آن پیوسته باشد.

(4) لااقل در یک نقطه از $(0, 1)$ پیوسته باشد.

مثال‌ها

مثال 32) کدام یک از توابع زیر روی R پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 x} & x \neq k\pi \\ 1 & x = k\pi \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos 2x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x} \quad (4) \qquad f(x) = \frac{1}{1 + \sin x} \quad (3)$$

مثال 33) تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ مفروض است، کدام گزینه صحیح است؟

- (1) تابع در فاصله $[0, +\infty)$ پیوسته نیست زیرا حد تابع وقتی $x \rightarrow 0$ وجود ندارد.
- (2) این تابع فقط در فاصله $(0, +\infty)$ پیوسته است.
- (3) تابع در $x = 0$ هم حد راست و هم حد چپ دارد و مقدار حد با مقدار تابع برابر است و پس در نقطه $x = 0$ پیوسته است.
- (4) این تابع در نقطه $x = 0$ حد راست دارد و این حد راست با مقدار تابع در $x = 0$ برابر است پس f در فاصله $[0, +\infty)$ پیوسته است.

مثال 34) تابع f در بازه $[a, b]$ تابعی پیوسته است و $a < 0 < b$ ، در این صورت تابع با ضابطه $f\left(\frac{1}{x}\right)$ در کدام بازه همواره پیوسته

است؟

$$\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right] \quad (1) \qquad \left(-\infty, \frac{1}{b}\right] \cup \left[\frac{1}{a}, +\infty\right) \quad (2) \qquad \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right] - \{0\} \quad (3) \qquad \left(-\infty, \frac{1}{a}\right] \cup \left[\frac{1}{b}, +\infty\right) \quad (4)$$

مثال 35) اگر f در بازه $[0, 2]$ پیوسته باشد، کدام تابع در تمام این بازه پیوسته است؟

$$g(x) = \sqrt{f^2(x) + f(x)} \quad (1) \qquad h(x) = \sqrt{f^2(x)(x-1)} \quad (2)$$

$$u(x) = \sqrt{f^3(x)(x-2)} \quad (3) \qquad k(x) = \sqrt{f^2(x)} \quad (4)$$

مثال‌ها

مثال 36) اگر f در دامنه اش تابعی پیوسته باشد کدام تابع در دامنه اش همواره پیوسته است ؟

- (1) $\sqrt{f(x)}$ (2) $[f(x)]$ (3) $\tan f(x)$ (4) $\sqrt[3]{f(x)}$

مثال 37) تابع $f(x) = \frac{1}{\text{Arc cos } x}$ مفروض است ، کدام گزینه صحیح است ؟

- (1) تابع در $x=0$ ناپیوسته است .
 (2) تابع در یک نقطه از دامنه اش ناپیوسته است .
 (3) تابع در تمام دامنه اش پیوسته است .
 (4) تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ ناپیوسته است .

مثال 38) تابع f در R پیوسته است ، کدام تابع در دامنه اش ممکن است ناپیوسته باشد؟

- (1) $f(x) = \text{Arc sin} |f(x)|$ (2) $f(x) = \text{Arc cos} \sqrt[3]{f(x)}$
 (3) $f(x) = \text{Arc tan} \frac{1}{f(x)}$ (4) $f(x) = \text{Arc tan} \sqrt{f(x)}$