

مثالها

مثال 1) تحقیق کنید که معادله $f(x) = x - 0.5 \cos x$ در فاصله $[0, 1]$ فقط یک ریشه دارد.

مثال 2) اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، فقط یکی از ریشه ها در بازه $[-1, 1]$ باشد:

$$|a+c| < |b| \quad (4) \quad |a+c| > |b| \quad (3) \quad a+c > b \quad (2) \quad a+c < -b \quad (1)$$

مثال 3) نشان دهید معادله $y = a \sin x + b - x$ و $\begin{cases} b > 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$ حداقل دارای یک ریشه مثبت است که از $b+a$ تجاوز نمی کند.

مثال 4) به ازای چه مقادیری از m یکی از ریشه های معادله $x^2 - (m+1)x + 2m - 3 = 0$ بین دو عدد 1 و -1 است؟

مثال 5) به ازای چه مقادیر m یک ریشه معادله $x^3 + mx^2 + x - 3 = 0$ در فاصله $[-1, 1]$ واقع است؟

مثال 6) فرض کنیم $f(x) = \tan x$ باشد، اگرچه $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ، $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ است ولی x ی در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ وجود ندارد که

$f(x) = 0$ شود، توضیح دهید که چرا این موضوع با قضیه بولتزانو در تضاد نیست؟

مثال 7) ثابت کنید معادله $2^x - 3x = 0$ دارای یک ریشه در بازه $[0, 1]$ است.

مثال 8) فرض کنیم تابع f در بازه $[0, 1]$ پیوسته است و برای هر x متعلق به این بازه $0 \leq f(x) \leq 1$ قرار دارد، ثابت کنید حداقل یک عدد مانند c که $0 \leq c \leq 1$ وجود دارد به طوریکه $f(c) = c$.

مثال 9) فرض کنیم تابع $f: [0, 2\pi] \rightarrow R$ روی بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته باشد و $f(0) = f(2\pi)$ ، ثابت کنید عدد $c \in [0, \pi]$ وجود دارد به قسمی که $f(c) = f(c + \pi)$.

مثال 10) فرض کنیم f, g دو تابع باشند که هر دو در بازه $[a, b]$ پیوسته و $f(a) < g(a)$ و $f(b) > g(b)$ ثابت کنید حداقل نقطه $c \in [a, b]$ وجود دارد به طوریکه $f(c) = g(c)$.

مثال‌ها

مثال 11 نشان دهید که معادله $\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$ که $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ و $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ دارای دو ریشه می باشد که بین بازه های (λ_1, λ_2) و (λ_2, λ_3) قرار دارد.

مثال 12 معادله $x = \frac{\pi}{6} \sin x + \frac{\pi}{3}$ مفروض است، در $x \in [0, \pi]$

(1) $x = \frac{\pi}{3}$ یک ریشه معادله است. (2) $x = \frac{\pi}{2}$ یک ریشه معادله است و معادله ریشه های دیگر هم دارد.

(3) معادله ریشه های بی شمار دارد. (4) معادله فقط یک ریشه دارد و آن هم $x = \frac{\pi}{2}$ است.