

مثال‌ها

مثال (1) اگر ریشه های معادله $x^3 - 9x^2 + mx - 15 = 0$ تصاعد عددی بسازند m را بدست آورید.

مثال (2) اگر ریشه های معادله $x^3 - 7x^2 + (m-1)x - 8 = 0$ تصاعد هندسی بسازند، m را بیابید.

مثال (3) اگر ریشه های حقیقی معادله $x^3 + mx^2 + 3 = 0$ ، α, β, γ باشد، m قابل قبول را طوری بیابید تا رابطه $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\gamma$ برقرار باشد.

مثال (4) اگر ریشه های معادله $x^3 - 3x + 1 = 0$ باشند مطلوب است محاسبه $S = \frac{1}{x_1^2 - 1} + \frac{1}{x_2^2 - 1} + \frac{1}{x_3^2 - 1}$

مثال (5) مجموع دو ریشه معادله درجه سوم $x^3 - 6x^2 + mx - 6 = 0$ برابر (5) است، m را بیابید.

مثال (6) اگر α, β, γ ریشه های معادله $x^3 - 3x + m = 0$ باشد، m را طوری تعیین کنید تا داشته باشیم: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6\alpha\beta\gamma$

مثال (7) اگر α, β, γ ریشه های معادله $x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0$ باشند مطلوب است محاسبه $S = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1}$

مثال (8) در معادله $x^3 - 9x^2 + (m-1)x - 15 = 0$ اگر α, β, γ ریشه های حقیقی معادله فوق باشند و $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 35$ ، m را بیابید.

مثال (9) اگر α, β, γ ریشه های حقیقی معادله $x^3 - 5x^2 + m - 1 = 0$ باشد، m را چنان بیابید که رابطه $\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} = -\frac{3}{2}$ برقرار باشد.

مثال (10) در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ اگر α, β, γ ریشه های حقیقی معادله باشد مطلوب است

$$k = \frac{\alpha + \beta}{\gamma} + \frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta}$$

محاسبه:

مثال (11) اگر α, β, γ ریشه های حقیقی معادله $x^3 + px + q = 0$ باشد حاصل عبارت $M = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}$ را بیابید.

مثال (12) اگر در معادله $x^3 - 8x^2 + 17x + m = 0$ ، α, β, γ ریشه های حقیقی معادله باشد، داشته باشیم $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 134$ ، مقدار m را بیابید.

مثال‌ها

مثال 13) اگر α, β, γ ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 - 3x + (m-2) = 0$ باشد و داشته باشیم $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = -15$ آنگاه مقدار m را بیابید.

مثال 14) اگر α, β, γ ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 - 3x + m = 0$ باشد و داشته باشیم $\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} = 24$ مقدار m را بیابید.

مثال 15) کدامیک ریشه معادله $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$ است.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| $\sqrt[3]{2} + 1$ (2) | $-\sqrt[3]{2} + 1$ (1) |
| $-\sqrt[3]{2} - 1$ (4) | $\sqrt[3]{2} - 1$ (3) |

مثال 16) دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} 8 + 4x + 2y + z = 0 \\ 27 + 9x + 3y + z = 0 \\ 64 + 16x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

مثال 17) در معادله درجه سوم $x^3 - 3x + m = 0$ اگر α, β, γ ریشه‌های این معادله باشد، m را طوری تعیین کنید تا داشته باشیم:

$$\alpha^{-2} + \beta^{-2} + \gamma^{-2} = 9$$

مثال 18) معادله درجه سومى مانند $x^3 + mx + 4 = 0$ مفروض است، اگر α, β, γ ریشه‌های این معادله باشند معادله درجه سومى تشکیل دهید که ریشه‌هایش $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ باشد.

مثال 19) معادله درجه سوم $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$ را در نظر بگیرید، ثابت کنید:

$$\tan^2 20^\circ + \tan^2 40^\circ + \tan^2 60^\circ + \tan^2 80^\circ = 36$$

مثال 20) معادله درجه سومى مشخص کنید که یک ریشه آن $\sqrt[3]{2} - 1$ باشد.

مثال 21) معادله درجه سومى تشکیل دهید که ریشه‌هایش $2 - \sqrt{3}$ ، 1 ، $2 + \sqrt{3}$ باشد.

مثال) در معادله درجه سوم $x^3 - 3x - 1 = 0$ مطلوبست حاصل هر یک از عبارتهای زیر (α, β, γ) ریشه‌های معادله اند):

مثال‌ها

$$22) \quad A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$23) \quad B = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

$$24) \quad C = \frac{\alpha^4}{\beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta^4}{\alpha^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma} + \frac{\gamma^4}{\alpha^3 + \beta^3 - 3\alpha\beta\gamma}$$

$$25) \quad D = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$$

مثال 26) به ازاء چه مقدار m در معادله درجه سوم $x^3 + 6x^2 + m = 0$ بین ریشه‌ها رابطه $\alpha^3\beta^3 + \beta^3\gamma^3 + \gamma^3\alpha^3 = 48$ برقرار است.
($m < 0$)

مثال 27) معادله درجه سوم $x^3 - 4x - 1 = 0$ مفروض است، اگر γ, β, α ریشه‌های این معادله باشد، معادله درجه سومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $\alpha + \gamma, \beta + \gamma, \alpha + \beta$ باشد.

مثال 28) دستگاه
$$\begin{cases} 1 + x + y + z = 0 \\ 8 + 4x + 2y + z = 0 \\ 27 + 9x + 3y + z = 0 \end{cases}$$
 مفروض است مطلوبست تعیین مقادیر z, y, x .

مثال) معادله $x^3 - 3x + 1 = 0$ مفروض است، اگر γ, β, α ریشه‌های معادله فوق باشند حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$$29) \quad A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$30) \quad B = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

$$31) \quad C = \alpha^2(\alpha - 1) + \beta^2(\beta - 1) + \gamma^2(\gamma - 1)$$

$$32) \quad D = \alpha(\alpha^2 + 1) + \beta(\beta^2 + 1) + \gamma(\gamma^2 + 1)$$

$$33) \quad E = \alpha^{-2} + \beta^{-2} + \gamma^{-2}$$

مثال‌ها

34) $H = \alpha^{-3} + \beta^{-3} + \gamma^{-3}$

35) $K = \alpha^4 \beta^2 \gamma^2 + \beta^4 \alpha^2 \gamma^2 + \gamma^4 \alpha^2 \beta^2$

مثال 36) در معادله $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ حاصل $\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3}$ برابر است با:

- (1) -6 (2) -12 (3) $-\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{15}{2}$

مثال 37) ریشه معادله $x^3 + 2x - 5 = 0$ در کدامیک از نامساوی‌های زیر صدق می‌کند؟

- (1) $-3 < x < -2$ (2) $0 < x < 1$
(3) $1 < x < 2$ (4) $-4 < x < -3$

مثال 38) اگر a, b, c سه ریشه ناصفر معادله $x^3 - bx^2 + bx - 3bc = 0$ باشد مقدار b کدام است؟

- (1) 7 (2) 1 (3) -5 (4) -9

مثال 39) اگر در معادله $x^3 - 3x + k + 2 = 0$ داشته باشیم $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -12$ مقدار k کدام است؟

- (1) 2 (2) -2 (3) 3 (4) -3

مثال 40) کدامیک از معادلات زیر ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادله $x^6 - 10x^3 + 1 = 0$ می‌باشند؟

- (1) $y^3 + 10y - 1 = 0$ (2) $y^2 - 10y + 1 = 0$
(3) $y^3 - 10y + 1 = 0$ (4) $y^3 + 10y + 1 = 0$

مثال 41) اگر x_1, x_2, x_3 ریشه‌های معادله $x^3 - 3x + 1 = 0$ باشند $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ برابر با:

- (1) -18 (2) 16
(3) 18 (4) 14

مثال‌ها

مثال 42) اگر α, β, γ ریشه‌های معادله $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ باشد معادله درجه سوم که ریشه‌هایش

$2\alpha + \beta + \gamma - 3$, $\alpha + 2\beta + \gamma - 3$, $\alpha + \beta + 2\gamma - 3$ باشد عبارت است از:

$$(1) \quad x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$$

$$(2) \quad x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

$$(3) \quad x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$$

$$(4) \quad x^3 - 3x^2 - x - 1 = 0$$

مثال 43) اگر $a^3 + pa + q = 0$, $b^3 + pb + q = 0$, $c^3 + pc + q = 0$ باشد $a + b + c$ برابر است با:

$$(1) \quad p \quad (2) \quad q \quad (3) \quad -p \quad (4) \quad 0$$

مثال 44) اگر $\begin{cases} 8 + 4x + 2y + z = 0 \\ 27 + 9x + 3y + z = 0 \\ 64 + 16x + 4y + z = 0 \end{cases}$ باشد مقدار z کدام است؟

$$(1) \quad 24 \quad (2) \quad -24 \quad (3) \quad 9 \quad (4) \quad -9$$

مثال 45) به ازاء کدام مقدار m سه ریشه معادله $x^3 - 6x^2 + (m-1)x - 6 = 0$ تصاعد عددی می سازند.

$$(1) \quad 4 \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad 9 \quad (4) \quad 12$$

مثال 46) به ازاء کدام مقدار m سه ریشه معادله $x^3 + mx^2 + 14x - 8 = 0$ تصاعد هندسی می سازند؟

$$(1) \quad 7 \quad (2) \quad -7 \quad (3) \quad 8 \quad (4) \quad 1$$

مثال 47) اگر در معادله $x^3 - 5x + 2m = 0$ داشته باشیم $\alpha^2(\alpha+1) + \beta^2(\beta+1) + \gamma^2(\gamma+1) = 12$ مقدار m کدام است؟

$$(1) \quad -\frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad -3 \quad (4) \quad 3$$

مثال 48) معادله درجه سوم تشکیل دهید که ریشه‌هایش $\cos \frac{5\pi}{7}, \cos \frac{3\pi}{7}, \cos \frac{\pi}{7}$ باشد.

مثال 49) مساحت مثلثی را پیدا کنید که طول ضلع‌های آن به ترتیب برابر ریشه‌های معادله $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ باشد.

مثال‌ها

مثال 50) می دانیم یکی از ریشه های معادله $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ به صورت $n + ni$ ($n \in R^+$) است، ثابت کنید:

$$c^2 = (a^2 - 2b)(b^2 - 2ac)$$

آیا عکس این حکم درست است؟

مثال 51) معادله درجه سوم $x^3 + px + q = 0$ با ضریب های درست p, q مفروض است، می دانیم $p^3 + q^2$ مضربی است از 23، ثابت کنید تفاضل دور یشه از این معادله مضربی است از 23.

مثال 52) می دانیم ریشه های معادله $a^3x^3 + b^3x^2 + c^3x + d^3 = 0$ مکعب ریشه های معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ اند.

چه رابطه ای بین d, c, b, a وجود دارد؟

مثال 53) مساحت مثلثی را پیدا کنید که طول ارتفاع های آن، ریشه های معادله زیر باشند: $x^3 - kx^2 + mx - n = 0$

مثال 54) دایره ای به شعاع x و سه وتر در این دایره به طولهای a, b, c مفروضند، می دانیم مجموع کمانهای مربوط به این سه وتر، برابر است با 180° ، ثابت کنید: $4x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - abc = 0$

مثال 55) طول ضلعهای یک چهار ضلعی محدب، یک تصاعد هندسی با قدر نسبت q ساخته اند، ثابت کنید $\frac{1}{2} < q < 2$.

مثال 56) مطلوبست حل معادله $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ به شرطی که ریشه های آن:

(1) به تصاعد حسابی باشند

(2) به تصاعد هندسی باشند

مثال 57) اگر x, y, z عددهایی درست باشند این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

مثال 58) در معادله $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$ حدود ریشه ها را مشخص کنید.

مثال‌ها

مثال 59) معادله $x^3 - 6x + 4 = 0$ و عبارت $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x - 1$ مفروض است اگر α, β, γ ریشه های معادله درجه سوم فوق باشند، معادله ای تشکیل دهید که ریشه هایش، $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ و $f(\gamma)$ باشد.

مثال 60) به ازاء چه مقادیر m یکی از ریشه های معادله $x^3 + mx^2 - x - 3 = 0$ بین 1, 2 قرار دارد؟

مثال 61) به ازاء چه مقدار k ریشه های معادله $x^3 - 3kx^2 + k^2x + 27 = 0$ تشکیل تصاعد حسابی می دهند؟

مثال 62) به ازاء چه مقدار m معادله $x^3 - 3x + m = 0$ سه ریشه ساده دارد؟

مثال 63) اگر α, β, γ ریشه های معادله $x^3 - 2x + m = 0$ باشند بازاء چه مقدار m رابطه زیر برقرار باشد؟

$$\alpha(\alpha^2 + 1) + \beta(\beta^2 + 1) + \gamma(\gamma^2 + 1) = -3$$

مثال 64) اگر a, b, c سه ریشه ناصفر معادله $x^3 - bx^2 + bx - 3bc = 0$ باشد، مقدار b را بدست آورید.

مثال 65) به ازاء چه مقدار a ، مجموع مربعات ریشه های معادله $x^3 + (a-2)x^2 + x - 1 = 0$ ، $\min$ است.

مثال 66) به ازاء چند مقدار m معادله $(x^3 - 3mx - 2)(x^2 - 1) = 0$ ریشه مضاعف دارد.

مثال 67) معادله $(3x-5)^3 - 8(x+2)^3 - (x-9)^3 = 0$ چند ریشه دارد.

مثال 68) در معادله $x^3 - 4x - 3 = 0$ مجموع مکعبات ریشه ها را بدست آورید.

مثال 69) معادله $x + \sqrt[3]{x} - 2 = 0$ چند ریشه دارد؟

مثال‌ها

مثال 70) اگر معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ دارای سه ریشه حقیقی باشد کدام درست است.

$$bc \leq 9ad \quad (2)$$

$$ad \geq bc \quad (1)$$

$$bd \geq 9ac \quad (4)$$

$$bc \geq 9ad \quad (3)$$