

مثالها

مثال 1) اگر $y = 2u^2 - u$ و $u = \sin 2x$ باشد y'_x را در $x = \frac{\pi}{6}$ بدست آورید.

مثال در توابع زیر:

2) if $y = f(x^3) \Rightarrow y'_x, y''_x = ?$

3) if $y = f(\sin x) \Rightarrow y'_x, y''_x = ?$

مثال 4) اگر $f(ax) = g(x)$ و $g'(0) = 1$ باشد، مطلوب است $f'(0)$.

مثال 5) اگر $f(\sin x) = g(x)$ و $g'(\pi) = 2$ باشد، مطلوب است $f'(0)$.

مثال 6) اگر $f(x) = g(1 - 4x^2)$ و $f''(0) = 16$ باشد، مطلوب است $g'(1)$.

مثال 7) تابع $f(x) = (hopog)(x)$ مفروض است، مشتق f را بیابید.

مثال 8) اگر f, g در R مشتق پذیر باشند و $h(x) = f(g(x^3 - f(x^2 + 1)))$ و $f(2) = 1, g(0) = 4, g'(0) = 4$ ، $f'(4) = -1, f'(2) = 0$ در این صورت $h'(1)$ را بیابید.

مثال 9) اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(g(x)) = x$ آنگاه در صورتی که $g \neq 0$ و g مشتق پذیر باشد، $g'(2)$ را با شرط $g(2) = 3$ پیدا کنید.

مثال 10) اگر $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 5}}$ باشد، آنگاه مشتق تابع $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ چقدر است؟

مثال 11) اگر f تابعی مشتق پذیر باشد و $f(0) = 0, f'(0) = 2$ باشد آنگاه $h'(0)$ را از رابطه $h(x) = f(x^2 - f(\sin x))$ بیابید.

مثال 12) اگر $f'(\tan x) = \frac{1}{2} \tan 2x$ باشد، آنگاه مشتق $y = f(\sin x)$ را محاسبه کنید. $\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

مثال‌ها

مثال 13 اگر $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}}$ باشد، آنگاه مشتق تابع $f(\sqrt[3]{x})$ در $x=8$ چقدر است؟

مثال 14 g تابعی زوج و مشتق پذیر است، اگر f نیز مشتق پذیر باشد آنگاه در $h(x) = f(g(x^2-1))$ ، $h'(-1)$ چقدر است؟

مثال 15 اگر f تابعی مشتق پذیر و $g(x) = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$ باشد، آنگاه $g'(\frac{\pi}{4})$ را بیابید.

مثال 16 اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ باشد، مشتق $f(\frac{1}{\cos x})$ در $x = \frac{\pi}{3}$ چقدر است؟ $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$

مثال 17 اگر $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ باشد، مشتق تابع $h(x) = f(\cos x)$ در $x = \frac{\pi}{3}$ چقدر است؟

مثال 18 مشتق $f(x) = \sin(\frac{\cos x}{x})$ در $x = \frac{\pi}{2}$ چقدر است؟

مثال 19 اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، $x > 0$ آنگاه مشتق تابع با ضابطه $g(x) = f(|x|)$ چقدر است؟ $(x \neq 0)$.

مثال 20 توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = [x]$ مفروضند، در $F(x) = f(g(x))$ مقدار $F'(1)$ چقدر است؟

مثال 21 اگر $h(x) = f(1 - \sin x)$ و $f'(0) = 2$ باشد، آنگاه $h''(\frac{\pi}{2})$ را بدست آورید. (f تابعی مشتق پذیر است)

مثال 22 اگر $g(x) = \cos f(x^2)$ و f تابعی مشتق پذیر و با مشتق پیوسته در R باشد و $f(0) = \frac{\pi}{6}$ ، $f'(0) = 2$ آنگاه $g''(0)$

را بدست آورید.

مثالها

مثال 23) اگر $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = f(\sqrt{x})$, $x > 0$ مفروض باشند، آنگاه $g''(3)$ را بیابید.

مثال 24) f تابعی دو بار مشتق پذیر با مشتق دوم پیوسته است، اگر $g(x) = f(x^2)$, $f'(0) = 2$ باشند، آنگاه $g''(0)$ را بیابید.

مثال 25) اگر $f(x) = g(\sqrt{x})$ و g تابعی دو بار مشتق پذیر باشد و $g'(1) = g''(1)$ آنگاه $f''(1)$ چقدر است ($x > 0$)؟

مثال 26) اگر $f(x) = \cos\left[\frac{\pi x^2}{2} - f(x^3)\right]$ باشد و f تابعی مشتق پذیر، آنگاه $f'(1)$ چقدر است؟

مثال 27) اگر مشتق تابع $(f \circ g)(x)$ برابر $\sin 2x$ و $g(x) = \cos x$ باشد، آنگاه $f'(x)$ چقدر است؟ ($x \neq k\pi$)

مثال 28) اگر $g(x) = f(3f(x^3))$ و $f(1) = f'(1) = \frac{1}{3}$ باشد، آنگاه $g'(1)$ چقدر است؟

مثال 29) فرض کنیم $f: R \rightarrow R$ روی R مشتق پذیر از مرتبه دوم و $h(x) = f(1-4x^2)$ و $f'(1) = 1$ باشد، مقدار $h''(0)$ را بدست آورید.

مثال 30) اگر $f(x) = \text{Arc sin } 2x\sqrt{1-x^2}$ باشد، مشتق تابع $f(\cos x)$ چقدر است؟

مثال 31) اگر $f(x) = \text{Arc cos } \frac{1-x^2}{1+x^2}$ باشد، آنگاه مشتق تابع $f(\tan \pi x)$ وقتی $0 < x < \frac{1}{2}$ چقدر است؟

مثال 32) اگر f با ضابطه $g(x) = \sin(x^2 - f(x^3))$ و تابعی مشتق پذیر باشد و $f'(1) = f(1) = 1$ در این صورت $g'(1)$ را بدست آورید.

مثالها

مثال 33) اگر f با ضابطه $f(x^3) = 2x - f^3(x)$ و در $R - \{0\}$ مشتق پذیر باشد، $f'(1)$ را بدست آورید.

مثال 34) اگر f با ضابطه $f(x) = g(x^2 - h(\sin x))$ و $h(0) = h'(0) = 1$ و $g'(-1) = 2$ باشد در این صورت $f'(0)$ چقدر است؟

مثال 35) f تابعی زوج و در R مشتق پذیر است و $f'(1) = 2$. اگر $g(x) = f(x^3)$ در این صورت $g'(-1)$ چقدر است؟

مثال 36) اگر $f(x) = g(h(x))$ ، $g(4) = f(4) = 3$ ، $h(4) = 4$ ، $f'(4) = 2$ ، $g'(4) = -5$ باشد، آنگاه $h'(4)$ چقدر است؟

مثال 37) تابع $f : (0, +\infty) \rightarrow R$ مفروض است، با فرض $f(2) = 4$ مشتق تابع $f(f(x))$ در $x = 2$ چقدر است؟

$$\begin{cases} f : (0, +\infty) \rightarrow R \\ f'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

مثال 38) اگر $g(x) = f(\sqrt{x})$ و f تابعی مشتق پذیر و $f(2) = f'(2) = 2$ باشد، آنگاه مشتق $f \circ g$ در $x = 4$ چقدر است؟

مثال 39) تابع f به ازاء هر x حقیقی مثبت مشتق پذیر و در رابطه $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ صدق می کند، $f'(2)$ چقدر است؟

مثال 40) اگر $g'(x) = \frac{1}{x}$ و $g(f(x)) = x^3 + 3x$ باشد، آنگاه $\frac{f(1)}{f'(1)}$ چقدر است؟

مثال 41) اگر فرض کنیم $h(x) = f(g(x))$ ، $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، می دانیم f در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است. در این صورت $h'(0)$ چقدر است؟

مثال 42) اگر مشتق تابع $f(x)$ به صورت $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، مشتق $f(\sin x)$ چقدر است؟

مثالها

مثال 43) اگر مشتق $f(x)$ نسبت به x برابر $\frac{1}{x}$ باشد، مشتق $f(ax)$ نسبت به x چقدر است؟

مثال 44) فرض کنیم توابع f و g مشتق پذیر بوده و $g'(a) \neq 0$ و $g(a) = b$ و $(fog)(x) = x$ باشد، $f'(b)$ چقدر است؟

مثال 45) اگر $f'(x) = x^2 - 2x$ باشد، مشتق $f(x^3)$ نسبت به x چقدر است؟

مثال 46) هر گاه f و g توابعی مشتق پذیر و $g(0) = 1$ و $g'(0) = 2$ و $g''(0) = \frac{1}{2}$ و $f'(1) = 6$ و $f''(1) = 10$

باشد، $(fog)''(0)$ چقدر است؟

مثال 47) اگر $f(x) = xg(x^2)$ و $g(36) = 5$ و $g'(36) = 2$ باشد، آنگاه $f'(6)$ چقدر است؟

مثال 48) اگر T دوره تناوب تابع مشتق پذیر $f(x)$ باشد، در این صورت دوره تناوب $f'(x)$ را بیابید.

مثال 49) اگر در حوزه اعداد حقیقی تابع $f(x)$ اکیدا نزولی باشد $f \circ f$ چگونه است؟

مثال 50) اگر $f'(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ باشد، مشتق $f(x^3)$ چقدر است؟

مثال 51) اگر $f'(x) = \log x$ باشد، مشتق $f\left(\frac{1}{x}\right)$ چقدر است؟

مثال 52) اگر f و g دارای مشتق اول و دوم باشند و $h(x) = f(g(x))$ آنگاه $h''(x)$ را حساب کنید.

مثال 53) اگر $h(x) = \cos(f(\sin x^2))$ و f دارای مشتق اول و دوم پیوسته باشد و $f(0) = \frac{\pi}{6}$ و $f'(0) = -3$ آنگاه $h''(0)$ را

محاسبه کنید.

مثال 54) اگر $f'(x) = \sin \sqrt{x}$ و $g(x) = f(x^2)$ مفروض باشند، آنگاه $g''(0)$ و $g''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ را محاسبه کنید. ($x > 0$)

مثالها

مثال 55 f تابعی چند جمله‌ای و به ازاء هر x حقیقی در رابطه $f(2x) - 4f(-x) = 12x$ صدق می‌کند، $f'(0)$ را بدست آورید.

مثال 56 ثابت کنید:

الف) مشتق هر تابع زوج و مشتق پذیر، تابعی فرد است. ب) مشتق هر تابع فرد و مشتق پذیر، تابعی زوج است.

مثال 57 ثابت کنید اگر f تابعی زوج باشد و در هر نقطه a مشتق پذیر باشد و $f'(a) = k$ آنگاه:

الف) $f'(-a) = -k$ ب) f در $x = -a$ مشتق پذیر است.

مثال 58 اگر f تابعی فرد و در هر نقطه a مشتق پذیر باشد، ثابت کنید:

الف) f در $x = -a$ مشتق پذیر است. ب) $f'(-a) = f'(a)$.

مثال 59 اگر f تابعی متناوب و مشتق پذیر باشد، ثابت کنید مشتق آن هم متناوب می‌باشد.

مثال 60 توابع f و g همواره مشتق پذیر و $f'(x)$ و $g'(x)$ موجودند، اگر g تابعی زوج باشد و $h(x) = (fog)(x)$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

(1) $g'(x)$ تابعی زوج است. (2) $h'(0) = 0$ (3) تابع h فرد است. (4) $h'(0)$ موجود نیست.

مثال 61 اگر $f'(x^2) = \frac{|x|+1}{|x|}$ باشد، $f(x^2)$ برابر است با: $(x \neq 0)$

(1) $x + 2\sqrt{x}$ (2) $x^2 + 2|x|$ (3) $x^2 + |x|$ (4) $x + 2\sqrt{|x|}$

مثال 62 اگر $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ باشد، $g'\left(\frac{3}{4}\right)$ کدام است؟

(1) $\frac{16}{15}$ (2) $\frac{15}{16}$ (3) $-\frac{15}{16}$ (4) $-\frac{16}{15}$

مثالها

مثال 63) اگر در حوزه اعداد حقیقی تابع $f(x)$ اکیداً نزولی و تابع $g(x)$ اکیداً صعودی باشند، برای تابعهای مرکب

$$\begin{cases} F(x) = fog(x) \\ G(x) = gof(x) \end{cases}$$

کدامیک از مطالب زیر صحیح است؟

- (1) G, F هر دو صعودی هستند .
 (2) F و G هر دو نزولی اند .
 (3) F نزولی و G صعودی هستند .
 (4) F صعودی و G نزولی هستند .

مثال 64) کدام همواره صحیح نمی باشد .

- (1) اگر f' تابعی فرد باشد آنگاه f زوج است .
 (2) اگر f' تابعی پیوسته در R و زوج باشد آنگاه f فرد است .
 (3) تابعی وجود دارد که فرد باشد اما مشتق آن هم زوج و هم فرد باشد .
 (4) تابعی وجود دارد که زوج باشد اما مشتق آن هم زوج و هم فرد باشد .

مثال 65) اگر $f(x)$ تابعی متناوب و با دوره تناوب a باشد و $f'(x)$ همواره موجود باشد در این صورت :

- (1) $f'(x)$ می تواند متناوب باشد یا نباشد .
 (2) $f'(x)$ متناوب است و a یک دوره تناوب است .
 (3) $f'(x)$ متناوب و با دوره تناوب $2a$ می باشد .
 (4) هیچگاه $f'(x)$ متناوب نیست .

مثال 66) f تابع چند جمله ای و به ازاء هر x در رابطه $f(3x) + 3f(-x) = 12$ صدق می کند $f'(x)$ را بیابید.

مثال 67) اگر f تابعی چند جمله ای و به ازاء هر x در رابطه $f(4x) - f(-x) = 5x$ صدق کند $f'(x)$ کدام است؟

مثال 68) f یک تابع چند جمله ای درجه دوم است به طوری که به ازاء هر x حقیقی $f(x) - f(-x) = 4x$ است، $f'(0)$ را بیابید.

مثالها

مثال) مشتق توابع زیر را بدست می آوریم:

$$69) f(x) = \sqrt[4]{x}$$

$$70) x(t) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + t^2}}$$

$$71) f(t) = \cos \sqrt[3]{t}$$

$$72) g(\alpha) = \sqrt[5]{1 + \tan \alpha}$$

$$73) k(z) = \sqrt{1 + \cos^2 \sqrt{1 + z^2}}$$

$$74) y(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}}$$

$$75) y(\alpha) = \tan^2 \left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} \alpha \right)$$

مثال 76) ثابت کنید اگر تابعی زوج و مشتق پذیر باشد، مشتق آن تابعی فرد است.