

مثالها

مثال) مشتق پذیری توابع زیر را در نقاط مطرح شده بررسی کنید.

1) $f(x) = |x - a|$; $x = a$

2) $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$; $x = 0$

3) $f(x) = (x^2 - [x^2])$; $x = 0$

4) $f(x) = x^2[x]$; $x = 0, 1$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$; $x = 0$

6) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$; $x = 0$

7) $f(x) = \begin{cases} x^2 \left[\frac{1}{x^2} \right] & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$; $x = 0$

8) $g(x) = \begin{cases} \sin^2 x \cos \left(\frac{1}{\sin x} \right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$; $x = 0$

9) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$; $x = 0$

مثال) مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده، تعیین می‌کنیم: (شرط پیوستگی برقرار است)

10) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$; $x = 1$

11) $f(x) = 2\sqrt{1-x}$; $x = -3$

12) $f(x) = ax^2 + bx + c$; $x = -\frac{b}{2a}$

13) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $x = -1$

مثال 14) مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = 0$ بررسی کنید.

مثالها

مثال 15 مشتق تابع $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ را در نقطه‌ی بررسی کنید.

مثال 16 فرض کنید تابع g به صورت $g(x) = xf(x)$ تعریف شده که در آن f تابعی پیوسته در $x=0$ است، در این صورت $g'(0)$ کدام است؟

- 0 (4) $3f(0)$ (3) $2f(0)$ (2) $f(0)$ (1)

مثال 17 تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in Q \\ x & ; x \in R - Q \end{cases}$ در $x=0$ چگونه است؟

- (1) مشتق پذیر است و $f'(0) = 0$ (2) مشتق پذیر و $f'(0) = 1$
 (3) مشتق راست دارد اما مشتق ندارد. (4) مشتق پذیر نمی باشد.

مثال 18 تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2$ مفروض است، کدام گزینه صحیح نیست؟

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ وجود ندارد.
 (3) $f'(0) = 0$ (4) تابع در نقطه $x = \pi$ پیوسته است.

مثال 19 تابع با ضابطه $f(x) = |x - \sin x|$ در $x=0$ کدام وضعیت را دارد؟

- (1) مشتق پذیر نمی باشد (2) $f'(0) = 0$
 (3) $f'(0) = 1$ (4) $f'(0) = -1$

مثال 20 تابع با ضابطه $f(x) = \text{Arc sin } x$ مفروض است، ثابت کنید در $x = \frac{1}{2}$ مشتق پذیر است و $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

مثال 21 تابع $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n)$ مفروض است، $f'(0)$ را بدست آورید.

مثال 22 تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ مفروض است، اگر $g(0) = g'(0) = 0$ باشد $f'(0)$ چقدر است؟

مثال‌ها

مثال 23 مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^3+1} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ محاسبه کنید.

مثال 24 اگر تابع f در $x = 1$ پیوسته باشد و $g(x) = (x-1)f(x)$ ، در این صورت $g'(1)$ کدام است؟
 1 (1) $f(1)$ (2) $f(0)$ (3) وجود ندارد (4)

مثال 25 تابع با ضابطه $f(x) = \frac{(3-x)g(x-2)}{(5x+14)^9 + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{9x}}$ مفروض است، اگر $g(1) = 3$ باشد در این صورت مقدار $f'(3)$ را بیابید.

مثال 26 تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ مفروض است، در این صورت $f'(0)$ را بیابید؟

مثال 27 تابع با ضابطه $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ مفروض است، $f'_-(1)$ را بیابید.

مثال 28 تابع با ضابطه $f(x) = [x] + (x - [x])^2$ مفروض است، کدام گزینه صحیح است؟

1) f در $x = 0$ ناپیوسته است. $f'(0) = 0$ (2)

3) $f'_+(0) = +\infty$ (4) $f'_-(0) = 2$

مثال 29 تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$ مفروض است، کدام گزینه صحیح است؟

1) تابع در صفر پیوسته نیست. $f'_+(0) = f'_-(0)$ (2)

3) $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = 2$ (4) $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$

مثال 30 تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ کدام وضعیت را دارد؟

1) مشتق پذیر نمی باشد. $f'(0) = 0$ (2)

3) $f'(0) = 1$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1$

مثالها

مثال 31) تابع با ضابطه $f(x) = x \cos \frac{\pi}{x^2+1}$ مفروض است، $f'(0)$ چقدر است؟

مثال 32) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x^2+x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ مفروض است، اگر $g(0) = g'(0) = 0$ باشد آنگاه $f'(0)$ چقدر است؟

مثال 33) مشتقات چپ و راست تابع با ضابطه $f(x) = |x| - [|x|]$ را در $x = 0$ بدست آورید .

مثال 34) تابع با ضابطه $f(x) = (2x^2 - 3x + 1) \text{Arc sin } \frac{1}{x}$ مفروض است، $f'_+(1)$ چقدر است؟

مثال 35) در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + |x|}$ در $x = 0$ کدام وضعیت صحیح است؟

$f'_+(0) = -\infty$ (2) $f'(0) = +\infty$ (1)

$f'(0) = 0$ (4) $f'_+(0) = +\infty$ (3)

مثال 36) f تابعی در R پیوسته و زوج می باشد به طوری که $f'_+(0) = +\infty$ در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

$f'_-(0) = +\infty$ (2) $f'_-(0) = -\infty$ (1)

$f(0) = 0$ (4) (3) ممکن است $f'_-(0)$ متناهی باشد

مثال 37) تابع $f(x) = \text{sgn}(x^2 - 1)$ در نقطه $x = 1$:

(1) مشتق پذیر است. (2) مشتق راست دارد اما مشتق چپ ندارد.

(3) مشتق چپ دارد و مشتق راست ندارد. (4) مشتق راست و مشتق چپ ندارد.

مثال 38) اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 2 \\ ax + b & ; x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ مشتق پذیر باشد، a و b را پیدا کنید .

مثال 39) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x^2 - bx)([x] - 2) & ; x \geq 3 \\ x^2[x] + a & ; x < 3 \end{cases}$ مفروض است، به ازاء چه مقادیر a و b تابع در $x = 3$ مشتق پذیر

است ؟

مثال‌ها

مثال 40) به ازاء چه مقادیری از a و b تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{m^2}{|x|} & ; |x| > c \\ a + bx^2 & ; |x| \leq c \end{cases}$ در نقاط $|x| = c$ مشتق پذیر است؟

مثال 41) در چه صورت تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a[x^2] + bx^2 & ; x \geq 1 \\ x[x] + 2bx & ; x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر است؟

مثال 42) اگر $f(x)$ در $x = 0$ مشتق پذیر باشد، ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x f(a) - a f(x)}{x - a} = f(a) - a f'(a)$

مثال 43) تابع با ضابطه $f(x) = x^m [x]$ به ازاء چه مقادیر m در $x = 0$ مشتق اول و دوم دارد؟ ($m \in \mathbb{N}$)

مثال 44) بنا به قضیه تقسیم اگر $f(x)$ یک چند جمله ای و a عددی حقیقی باشد، چند جمله ای $g(x)$ وجود دارد به قسمی که:

$$f(x) = (x - a)g(x) + f(a)$$

اگر $f(a)$ باقیمانده $f(x)$ بر $x - a$ باشد، مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

مثال 45) کدامیک از گزاره های زیر صحیح است؟

- 1) اگر f در a پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر است.
- 2) اگر f در a حد داشته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر است.
- 3) اگر f در a حد نداشته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر نیست.
- 4) هر سه مورد درست است.

مثال 46) دو تابع f و g مفروضند به طوری که مشتق چپ f در a با مشتق راست g در a برابر است، اگر $h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \leq a \\ g(x) & ; x \geq a \end{cases}$

آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

- 1) همواره در a مشتق پذیر است.
- 2) اگر $f(a) = g(a)$ آنگاه h در a مشتق پذیر است.
- 3) حتی اگر $f(a) = g(a)$ ممکن است h در a مشتق پذیر نباشد.
- 4) همواره $h'(a) = 0$

مثالها

مثال 47) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} & ; x \neq a \\ g'(a) & ; x = a \end{cases}$ تعریف شده است. اگر $g'(a)$ موجود باشد، نتیجه می شود که :

- (1) f در a معین نیست. (2) f در a پیوسته است.
 (3) g در a پیوسته نمی باشد. (4) ممکن است f در a پیوسته باشد یا نباشد.

مثال 48) کدام گزینه همواره صحیح است ؟

- (1) هر تابع اگر در $x=0$ پیوسته باشد آنگاه در $x=0$ مشتق پذیر است.
 (2) اگر تابع فرد f در $x=0$ تعریف شده باشد آنگاه در $x=0$ مشتق پذیر است.
 (3) اگر f تابعی فرد و در $x=0$ پیوسته باشد آنگاه در $x=0$ مشتق پذیر است.
 (4) اگر تابع زوج f در $x=0$ مشتق پذیر باشد آنگاه $f'(0)=0$.

مثال 49) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 2 \\ 4 & ; x = 2 \\ g(x) & ; x > 2 \end{cases}$ مفروض است $g(x)$ به کدام معادله باشد تا تابع f در $x=2$ مشتق پذیر شود؟

- (1) $g(x) = x + 2$ (2) $g(x) = x^3 - 8x$
 (3) $g(x) = \sqrt{x + 2}$ (4) $g(x) = 4x - 4$

مثال 50) فرض کنیم تابع f به ازای هر x و y از R در رابطه $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ صدق کند در این صورت کدام گزینه

همواره صحیح است؟

- (1) f در R اکیداً صعودی است. (2) f در R همواره ثابت است.
 (3) f در R اکیداً یکنوا می باشد. (4) $f'(0) = 1$ است.

مثال 51) اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو موجود باشند، ثابت کنید تابع f در $x = a$ پیوسته است.

مثال 52) فرض می کنیم $f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد و a عددی حقیقی باشد، با محاسبه و حد گیری نشان دهید تابع $g(x) = f(ax)$

نیز مشتق پذیر است: $g'(x) = af'(ax)$

مثالها

مثال 53) اگر f تابعی مشتق پذیر در a باشد و c عددی دلخواه باشد، با محاسبه نشان دهید که تابع (cf) در نقطه a مشتق پذیر است

$$(cf)'(a) = cf'(a)$$

و داریم:

مثال 54) تابع $f(x)$ مفروض است و به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x) = f(x-b)$ را به صورت $g(x) = f(x-b)$ تعریف می‌کنیم.

الف) از طریق نمودار نشان می‌دهیم که اگر خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه a وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر نمودار f در نقطه $a-b$ موجود است و این دو خط با هم موازیند.

ب) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر g در نقطه a مشتق پذیر باشد، آنگاه f در نقطه $a-b$ مشتق پذیر است و $f'(a-b) = g'(a)$.

مثال 55) تابع $f(x)$ در نقطه a مشتق پذیر است و به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x) = f(x) + b$ را به صورت $g(x) = f(x) + b$ تعریف

می‌کنیم:

الف) از طریق نمودار، وجود مماس بر نمودار تابع f در نقطه به طول a را نشان دهید و g نیز در a مشتق پذیر است و $f(x)$

و $g'(a) = f'(a)$ در نقطه‌ی $x = a$ مشتق پذیر است، یعنی $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجود و متناهی است.

ب) از طریق حد گیری و محاسبه، نیز درستی تساوی $g'(a) = f'(a)$ را نشان دهید.

مثال 56) تابع $x(t) = t^2 - 2t - 1$ معادله‌ی حرکت متحرک بر محور x هاست (t بر حسب ثانیه و x بر حسب سانتی متر). مطلوب است:

الف) محاسبه‌ی سرعت متوسط این متحرک در فاصله‌ی زمانی $t_1 = 1$ و $t_2 = 4$.

ب) محاسبه‌ی سرعت لحظه‌ای متحرک در زمان‌های $t = 0$ و $t = 1$ و $t = 3$:

مثال 57) توپی را با سرعت اولیه 30 متر در ثانیه به طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه پرتاب به طرف

بالا باشد و معادله حرکت به شکل $x = f(t) = -4/9t^2 + 30t$ باشد، مطلوب است:

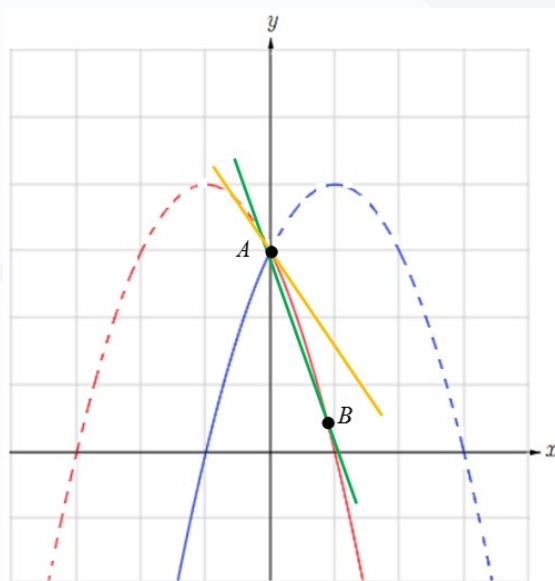
الف) محاسبه‌ی سرعت لحظه‌ای توپ در پایان یک ثانیه پس از پرتاب:

ب) محاسبه‌ی سرعت لحظه‌ای توپ در پایان سه ثانیه پس از پرتاب:

مثالها

مثال 58 تابع $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 4 & ; x \leq 0 \\ -(x+1)^2 + 4 & ; x > 0 \end{cases}$ را در شکل زیر در نظر می‌گیریم.

نقطه $A(0, 3)$ و نقطه $B(x, f(x))$ را سمت راست A در نظر می‌گیریم و حد شیب خط AB را وقتی B به A نزدیک می‌شود را حساب کنید.



مثال 59 در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & ; -1 \leq x \leq 0 \\ |x| & ; 0 < x \leq 2 \end{cases}$ در $x=0$ کدام گزینه صحیح است؟

- | | |
|-------------------|-------------------|
| $f'_+(0) = 1$ (2) | $f'(0) = 0$ (1) |
| $f'_-(0) = 1$ (4) | $f'_-(0) = 0$ (3) |

مثال 60 مشتق تابع با ضابطه $f(x) = x \operatorname{sgn} x$ در $x=0$ چگونه است؟

- | | | | |
|-----------------------|-------------------|-----------------|----------------|
| $f'(0) = +\infty$ (4) | $f'_+(0) = 1$ (3) | $f'(0) = 0$ (2) | (1) مشتق ندارد |
|-----------------------|-------------------|-----------------|----------------|