

مثالها

مثال 1) مشتق مرتبه چندم تابع با ضابطه $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عدد صفر است؟

مثال) مشتق مرتبه n ام توابع زیر را بدست آورید.

2) $y = \frac{1}{x}$

3) $y = \frac{ax+b}{1-x}$

4) $y = \frac{2}{x^2-1}$

5) $y = \sin x$

6) $y = \sin^2 ax$

7) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

8) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

9) $f(x) = xe^x$

10) $f(x) = e^{2x}$

11) $f(x) = xe^{kx}$

مثال 12) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ و f و g سه بار مشتق پذیر باشند، آنگاه $h''(x)$ را محاسبه کنید.

مثال 13) اگر توابع $f(x)$ ، $g(x)$ دارای مشتقات متوالی تا مرتبه سوم باشند، مطلوب است محاسبه $[f(x) \cdot g(x)]'''$.

مثال 14) فرض کنید u و v توابعی باشند که بی نهایت بار مشتق پذیرند، اگر $f = uv$ آنگاه $f^{(4)}$ را بیابید.

مثال 15) تابع f یا ضابطه $f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x^3 & ; x > 0 \end{cases}$ مفروض است، توابع $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f'''(x)$ را به دست آورید.

مثال 16) تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3+x+5x^2}{x}$ مفروض است، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$ چقدر است؟

مثالها

مثال 17) اگر به ازاء هر x حقیقی $f^{(3)}(x) = 0$ و $f^{(2)}(x) \neq 0$ کدام همواره صحیح است؟

- (1) f همواره یک چند جمله‌ای از درجه سوم است.
- (2) f یک چند جمله از درجه دوم و در حالتی از درجه اول است.
- (3) f همواره یک تابع چند جمله‌ای درجه دوم است.
- (4) f هم یک تابع چند جمله‌ای از درجه دوم است و هم می‌تواند تابعی غیر چند جمله‌ای باشد.

مثال 18) برای چه مقداری از a و b و c تابع باضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 & ; x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & ; x > 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق مرتبه دوم دارد؟

مثال 19) تابع باضابطه $f(x) = \begin{cases} x^4 + ax^3 + bx - 1 & ; x \geq 1 \\ cx^2 + 9x - 3 & ; x < 1 \end{cases}$ مفروض است، اگر $f''(1)$ وجود داشته باشد، مقدار a و b و c را بدست آورید.

مثال 20) اگر $f(x) = g(\sqrt{x})$ و $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ و $g''\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ ، مقدار $f''\left(\frac{1}{4}\right)$ را بیابید.

مثال 21) مشتق بیستم تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - 6x + 9}$ را بیابید.

مثال 22) اگر $f(x) = (x-3)^2(x+3)(x-5)$ باشد، در این صورت $f''(3)$ را بیابید.

مثال 23) اگر $f(x) = (x-1)^5(x-2)^4(x+1)^2(x-4)$ باشد، در این صورت مشتق پنجم f در $x=1$ را بیابید.

مثال 24) اگر f'' موجود و در همسایگی a پیوسته باشد، آنگاه ثابت کنید: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a)$

مثال 25) اگر $y = \sin x + 2 \cos x$ نشان دهید که $y''' + y'' + y' + y = 0$

مثالها

مثال 26) مشتق دهم تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3^{10}} \sin 3x$ در $x = \frac{\pi}{6}$ چقدر است؟

مثال 27) در چه صورت تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & ; x \geq k \\ a'x^2 + b'x + c' & ; x < k \end{cases}$ دارای مشتق اول و دوم است؟

مثال 28) مشتق ششم تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{81} \cos 3x$ در $x = \frac{\pi}{3}$ چقدر است؟

مثال 29) در تابع با ضابطه $f(x) = 27x^{37} - x^{27} + 12x^{17}$ مشتق هفدهم به ازای $x = 0$ چقدر است؟

مثال 30) اگر $f(x) = g(ax)$ و $f^{(n)}(x)$ نمایش مشتق n ام باشد و $g^{(n)}(0) = 1$ آنگاه $f^{(n)}(0)$ چقدر است؟

مثال 31) اگر $f(x) = xe^{2x}$ باشد، آنگاه مشتق سوم رادر $x = 0$ را بیابید.

مثال 32) مشتق n ام تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ در $x = 0$ چقدر است؟ ($n \geq 2$)

مثال 33) اگر تابع $y = f(x)$ دارای مشتق مرتبه n ام باشد در این صورت $y^{(n)} = [f(ax)]^n$ برابر است با:

(1) $af^n(x)$ (2) $f^n(ax)$ (3) $a^n f^n(x)$ (4) $a^n f^n(ax)$

مثال 34) اگر $y = A \sin kx + B \cos kx$ باشد، y'' چقدر است؟

مثال 35) تابع f به معادله $y = \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5}$ مفروض است، ثابت کنید $\frac{2y'^2 - yy''}{y^3} = -2$.

مثال 36) ثابت کنید بین مشتقات مرتبه اول و دوم تابع به معادله $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + mx + n}}$ رابطه $yy'' - 3y'^2 + y^4 = 0$ برقرار است.

مثالها

مثال 37) اگر y' و y'' به ترتیب مشتقات مرتبه اول و دوم تابع به معادله $y = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ باشند، ثابت کنید:

$$(x^2 - 1)y'' + xy' - n^2y = 0$$

مثال 38) اگر y' و y'' و y''' مشتقات مرتبه اول، دوم، سوم تابع با ضابطه $y = \frac{1}{(x-a)^2}$ باشند، ثابت کنید $y''' = 2yy'y''(x-a)^4$

مثال 39) تابع با ضابطه $y = \frac{\text{Arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}}$ مفروض است، ثابت کنید $(1-x^2)y' = xy + 1$

مثال 40) اگر $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ باشد، عبارت $y^2 + 2yy'(1+x)$ چقدر است ($x > -1$) ؟

مثال 41) تابع با ضابطه $y = \sqrt{\frac{1}{\cos 2x}}$ و $0 < x < \frac{\pi}{4}$ مفروض است، ثابت کنید $y + y'' = 3y^5$.

مثال 42) $y = f(x)$ و $z = \frac{x^2}{f(x)}$ مفروضند، نشان دهید $\frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = \frac{2}{x}$.

مثال 43) تابع با ضابطه $y = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}$ مفروض است، حاصل $\frac{2y'^2 - yy''}{y^3}$ را بیابید.

مثال 44) اگر $x^2 + y^2 = R^2$ باشد y_x'' را بدست آورید.

مثال 45) اگر $y = 5 \sin 4x + 7 \cos 4x$ باشد، آنگاه $y'' + 16y$ چقدر است.

مثال 46) چند جمله‌ای $f(x)$ را چنان مشخص کنید که داشته باشیم $f(x) = f'(x) \cdot f''(x)$.

مثال 47) اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای و $f \circ f'(x) = 4x^2 - 3$ باشد، مطلوب است $f''(x)$ ؟

مثال‌ها

مثال 48) اگر f تابعی چند جمله‌ای و $x^3 \cdot f(x) = f'(x) \cdot f''(x)$ باشد f از چه درجه‌ای است؟

مثال 49) اگر f تابعی چند جمله‌ای ناصفر و به ازای هر x ، $f'(x^2) \cdot f''(x) = 4f(x)$ باشد، ضابطه تابع f را بدست آورید.

مثال 50) اگر f تابعی چند جمله‌ای و $f \circ f'(x) = 4x^2 + 7$ باشد، $f''(4)$ چقدر است؟

مثال 51) اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد که در معادله $f(2x) = f'(x) \cdot f''(x)$ صدق کند، درجه چند جمله‌ای f را بیابید.

مثال 52) تابع f به ازاء هر x حقیقی دارای مشتق سوم و $f'''(x) = 0$ می‌باشد. اگر $f''(1) = 2$ و $f'(-1) = 4$ و $f(0) = 0$ باشد ضابطه $f(x)$ را پیدا کنید.

مثال 53) اگر $f(f'(x)) = 4(x^2 + 1)$ و f تابعی چند جمله‌ای باشد، ضابطه $f(x)$ را بدست آورید.

مثال 54) اگر f تابعی چند جمله‌ای ناصفر و $f'(x^2)f''(x) - 4 = 4f(x)$ و آنگاه $f(3)$ چقدر است؟

مثال 55) f تابعی چند جمله‌ای است به طوری که $f'(f''(x)) = 8$ و $f'(0) = 4$ در این صورت $f(2) - f(0)$ چقدر است؟
(f درجه اول نمی‌باشد).

مثال 56) اگر $f(x) = \sqrt{(6+g(x))^3}$ و g تابعی دو بار مشتق پذیر و $g(2) = -2$ ، $g'(2) = 4$ ، $g''(2) = 5$ باشد، آنگاه $f''(2)$ چقدر است؟

مثال 57) اگر $f(x) = x^m |x|$ مفروض باشد، به ازاء چه مقدار m تابع در $x=0$ دارای مشتق اول و دوم است؟ ($m \in \mathbb{N}$)

مثال 58) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^n & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$ ، $n \in \mathbb{Z}$ مفروض است، اگر f' در صفر مشتق پذیر باشد، کدام شرط زیر برقرار است؟

$n \geq 3$ (4)

$n \geq 2$ (3)

$n \geq 1$ (2)

$n \geq 0$ (1)