

مثالها

مثال تابع مشتق توابع زیر را بدست آورید و در صورت لزوم دامنه f' را بیابید.

1) $f(x) = \sqrt{x}$

2) $f(x) = |x|$

3) $f(x) = a^x$; $0 < a \neq 1$

4) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & ; |x| \leq 1 \\ |x|-1 & ; |x| > 1 \end{cases}$

مثال 5

1) مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در $x = 2$ به دست آورید.

2) مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه دلخواه x به دست آورید.

مثال 6 هرگاه $f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ و $g(0) = g'(0) = 0$ باشد، $f'(0)$ را حساب کنید.

مثال 7 تابع با ضابطه $f(x) = \cos \sqrt[3]{x-1}$ مفروض است، با استفاده از تعریف مشتق $f'(2)$ را حساب کنید.

مثال 8 اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & ; x \geq 1 \\ x^2-1 & ; x < 1 \end{cases}$ مفروض باشد، حد عبارت $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ وقتی $h \rightarrow 0^-$ را بدست آورید.

مثال 9 فرض کنید به ازای هر x, y داریم $f(x+y) = f(x)f(y)$. اگر $f(5) = 2$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ ، در این صورت $f'(5)$ را بدست آورید.

مثالها

مثال 10) توابع $\begin{cases} f: R \rightarrow R \\ g: R \rightarrow R \end{cases}$ مفروضند بطوریکه:

- 1) $\forall x, \forall y \in R, f(x+y) = f(x)f(y)$
- 2) $\forall x \in R, f(x) = 1+xg(x)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$

مشتق تابع f را در هر نقطه از x پیدا کنید.

مثال 11) g تابعی زوج و در $x=0$ از راست مشتق پذیر و $g'_+(0) = 1$ کدام گزینه همواره صحیح است؟

- 1) g از چپ نیز همواره مشتق پذیر و $g'_-(0) = 1$
- 2) g در $x=0$ مشتق پذیر و $g'(0) = 1$
- 3) $g'(0)$ هرگز وجود ندارد.
- 4) فقط اگر $g(0) = 0$ آنگاه $g'_-(0) = -1$

مثال 12) f تابعی فرد و در $x=0$ از راست مشتق پذیر است، کدام همواره صحیح است؟

- 1) فقط اگر $f'_+(0) = 0$ آنگاه $f'_-(0)$ موجود و برابر صفر است.
- 2) اگر $f'_+(0) = k$ آنگاه $f'_-(0) = -k$.
- 3) f همواره در $x=0$ مشتق چپ دارد و $f'_-(0) = f'_+(0)$.
- 4) f در $x=0$ مشتق چپ دارد اما f در $x=0$ مشتق پذیر نمی باشد.

مثال 13) تابع ناصفر f به ازاء هر x و y حقیقی در رابطه $f(x+y) = f(x)f(y)$ صدق می کند در این صورت اگر f در صفر و 1

مشتق پذیر باشد $f'(x)$ کدام است؟

- 1) $f(x).f(0)$
- 2) $f(x).f(1)$
- 3) $f(x).f'(0)$
- 4) $f(x).f(1)$

مثال 14) تابع f به ازاء هر x و y مثبت در رابطه $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ صدق می کند، اگر f در $x=1$ مشتق پذیر باشد آنگاه

$f'(x)$ چقدر است؟

مثال 15) فرض کنیم f و g دو تابع باشند که حوزه های تعریف آنها R است و به علاوه فرض کنیم:

- I) $\forall x \in R : g(x) = xf(x) + 1$
- II) $\forall x, y \in R : g(x+y) = g(x).g(y)$
- III) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

ثابت کنید که $g'(x) = g(x)$.

مثال‌ها

مثال 16 فرض کنیم f تابعی با حوزه تعریف $D_f = R$ باشد و به ازاء هر $a, b \in R$ داشته باشیم $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$. به علاوه

فرض کنیم که $f(0) = 1$ و $f'(0)$ وجود داشته باشد. ثابت کنید که به ازاء هر $x \in R$ ، $f'(x)$ وجود داشته و داریم:

$$f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$$

مثال 17 تابع $f(x)$ مفروض است و به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x) = f(x-b)$ را به صورت $g(x) = f(x-b)$ تعریف کنید.

مثال 18 روی نمودار تابع $f(x) = x^2$ نقطه ثابت $A(a, a^2)$ را در نظر می‌گیریم. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h (مثبت یا

منفی) نقطه $B(a+h, (a+h)^2)$ را روی نمودار تابع در نزدیکی A در نظر می‌گیریم:

شیب خط AB را بر حسب تابعی از h محاسبه کنید.

مثال 19 توپ تنیسی را به هوا پرتاب کرده ایم. اگر مسافت پیموده شده به وسیله توپ بر حسب متر، تابعی از زمان t بر حسب ثانیه به صورت

$$S(t) = 12t - 3t^2 \text{ باشد:}$$

الف) سرعت متوسط توپ در 2 ثانیه اول را محاسبه کنید.

ب) سرعت توپ در لحظه t را محاسبه می‌کنیم:

مثال 20 متحرکی روی محور x ها طبق ضابطه $x(t) = t^2 - t$ حرکت می‌کند. سرعت متوسط متحرک بین دو زمان t_0 و

$t_0 + h$ (عدد ناصفر و کوچک) را بنویسید.