

مثال‌ها

**مثال 18)** تابع با ضابطه  $f(x) = x \sin(\cos x)$  در  $x=0$ :

- (1) ماکسیمم نسبی دارد. (2) مینیمم نسبی دارد. (3) نقطه عطف دارد. (4)  $f'(0)=1$

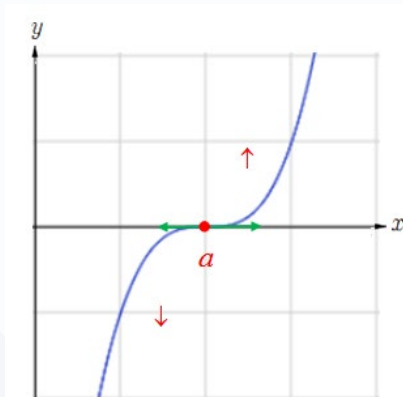
**مثال 19)** تابع با ضابطه  $f(x) = x \cos x - \sin x$  در  $x=0$ :

- (1) ماکسیمم نسبی دارد. (2) مینیمم نسبی دارد. (3) نقطه عطف دارد. (4) مشتق پذیر نمی باشد.

**مثال 20)** تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x$  در  $x=0$ :

- (1) ماکسیمم نسبی دارد. (2) مینیمم نسبی دارد. (3) نقطه عطف دارد. (4) نقطه عادی است.

**مثال 21)** شکل زیر نمودار تابع  $f$  در مجاورت  $x=a$  است، کدام یک از گزاره های زیر درست است؟



- (1)  $f''(a)=0, f'(a)>0, f(a)=0$   
 (2)  $f''(a)>0, f'(a)>0, f(a)>0$   
 (3)  $f''(a)=0, f'(a)=0, f(a)=0$   
 (4)  $f''(a)=0, f'(a)>0, f(a)>0$

**مثال 22)** نقطه عطف تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x\sqrt{x} - 6x$  به کدام طول است؟

- (1) 1 (2)  $\frac{1}{2}$  (3)  $\frac{1}{4}$  (4)  $\frac{1}{3}$

مثال‌ها

**مثال 23** برای تابع با ضابطه  $f(x) = a - \sqrt[3]{x-b}$  نقطه به طول  $x = b$ :

- (1) ماکسیمم نسبی است. (2) مینیمم نسبی است. (3) نقطه عطف است. (4) نقطه بازگشت است.

**مثال 24** کدام عدد، نقطه عطف تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 + 4 \cos x$  در بازه  $[0, \pi]$  است؟

- (1)  $\frac{\pi}{3}$  (2)  $\frac{\pi}{6}$  (3)  $\frac{\pi}{2}$  (4)  $\frac{3\pi}{2}$

**مثال 25** در تابع  $f(x) = x^2 \sin \pi x$  نقطه  $x = 0$ :

- (1)  $x = 0$  نقطه مینیمم نسبی است. (2)  $x = 0$  نقطه عطف تابع است.  
(3)  $f'(0) = \pi$  (4)  $x = 0$  نقطه ماکسیمم نسبی است.

**مثال 26** تابع  $f$  دو بار مشتق پذیر و با مشتق پیوسته است و روی  $R$  تابعی زوج است. اگر در بازه  $[1, 3]$ ، به ازای هر  $x$ ،  $f''(x) < 0$

آنگاه کدام صحیح است؟

- (1) در بازه  $[1, 3]$  تقعر به بالا است. (2) در بازه  $[-3, -1]$  تقعر به بالا است.  
(3) در بازه  $[-3, -1]$  تقعر به پایین است. (4)  $x = 3, x = 1$  نقاط عطف  $f$  اند.

**مثال 27** نمودار تابع  $y = \sqrt[3]{x-2}$  در نقطه عطفش بر کدامیک از خطوط زیر مماس است؟

- (1)  $y = x$  (2)  $y = -x$  (3)  $x = 2$  (4)  $y = 2$

**مثال 28** کدام یک از توابع زیر همواره دو نقطه عطف دارد؟

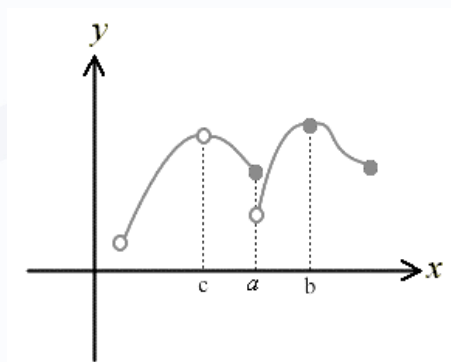
- (1)  $y = x^4 + (a^2 + 1)x^2 + 1$  (2)  $y = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x}$   
(3)  $y = \frac{x^2 + a^2 + 2}{x^2 + 1}$  (4)  $y = ax^4 + x^2 + 1$

**مثال 29** تابع  $f$  در  $R$  مشتق پذیر است و  $f(-3) = 2$ ،  $f(0) = 0$ ،  $f(3) = -2$ ،  $f'(0) = f'(-3) = f'(3) = 0$  اگر

$|x| > 3$ ،  $f'(x) > 0$  و اگر  $0 < |x| < 3$ ،  $f'(x) < 0$  کدام گزینه می تواند صحیح باشد؟

- (1) تابع سه اکسترمم نسبی دارد. (2)  $x = 0$  نقطه عطف تابع است.  
(3) تابع در  $x = 3$ ،  $x = -3$  نقطه عطف دارد. (4)  $x = 0$  نقطه ماکسیمم نسبی تابع است.

مثال‌ها



**مثال 30** شکل مقابل نمودار تابعی را نشان می‌دهد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

- (1)  $x = a$ ، max نسبی است.
- (2)  $x = c$  نقطه max نسبی است.
- (3)  $x = b$  نقطه عطف است.
- (4) در  $x = b$  جهت تقعر تغییر کرده است.

**مثال 31** تابع با ضابطه  $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$  چند نقطه عطف دارد؟

- (1) 1      (2) 2      (3) 3      (4) هیچ

**مثال 32** تابع  $R \rightarrow R$  و  $f$  پیوسته و به ازای هر  $x$  حقیقی مشتق پذیر است و با مشتق پیوسته اما  $f_+'(a) = +\infty$ ،  $f_-'(a) = -\infty$

در این صورت  $x = a$ :

- (1) نقطه max نسبی  $f$  است.
- (2) نقطه min نسبی  $f$  است.
- (3) نقطه عطف  $f$  است.
- (4) نقطه max نسبی  $f'$  است.

**مثال 33** تابع با ضابطه  $f(x) = 3x^4 - 8x^3$  مفروض است:

- (1) تابع یک max و یک min دارد.
- (2) تابع دو اکسترمم نسبی و دو نقطه عطف دارد.
- (3) تابع یک اکسترمم نسبی و یک نقطه عطف دارد.
- (4) تابع دو نقطه عطف و یک اکسترمم دارد.

**مثال 34** تابع  $f$  دو بار مشتق پذیر و  $f''(x) = (x-1)^2 g(x)$  که  $g(1) \neq 0$  در این صورت نقطه  $x = 1$  در تابع  $f'$  چگونه نقطه ای

است؟

- (1) نقطه عطف
- (2) اکسترمم نسبی
- (3) نقطه عادی
- (4) نقطه میلات است

**مثال 35** تابع با ضابطه  $f(x) = x|x| - 2x$  در  $x = 0$  دارای کدام خاصیت است؟

- (1) ماکسیمم نسبی دارد.
- (2) مینیمم نسبی دارد.
- (3) نقطه عطف دارد.
- (4) نقطه زاویه دار دارد.

مثال‌ها

**مثال 36** تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^4 & ; x \geq 0 \\ x^3 & ; x < 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  کدام وضعیت را دارد؟

- (1) اکسترمم نسبی دارد .
- (2) در  $x = 0$  دارای مشتق دوم است و نقطه عطف دارد .
- (3) در  $x = 0$  مشتق دوم وجود ندارد اما نقطه عطف دارد .
- (4)  $f'$  اکیداً صعودی است .

**مثال 37** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x > 1 \\ \frac{3-x^2}{2} & ; x \leq 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  کدام وضعیت را دارد؟

- (1) نقطه ماکسیمم نسبی است .
- (2) نقطه عطف است .
- (3) نقطه زاویه دار است .
- (4) نقطه مینیمم نسبی است .

**مثال 38** اگر  $f'(x) = |x|$  در این صورت  $x = 0$  چه نقطه ای از تابع  $f$  است؟

- (1) ماکسیمم نسبی
- (2) مینیمم نسبی
- (3) نقطه عطف
- (4) نقطه معمولی

**مثال 39** کدام گزینه همواره صحیح است؟

- (1) اگر  $f(x) = g(x) + h(x)$  آنگاه  $f'(x) = g'(x) + h'(x)$  .
- (2) اگر  $f$  مشتق پذیر و  $f'(1)$  موجود باشد، آنگاه  $f$  در  $x = 1$  دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی است .
- (3) اگر  $f$  دوبار مشتق پذیر و  $f''(2) = 0$  آنگاه در  $x = 2$  نقطه عطف دارد .
- (4) اگر  $f$  در  $x = 2$  نقطه عطف داشته باشد و مشتق دوم در آن موجود باشد آنگاه  $f''(2) = 0$  .

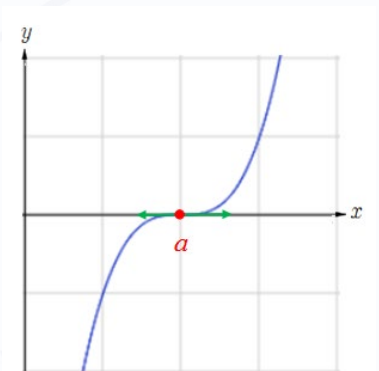
مثال‌ها

**مثال 40** تابع  $f(x) = \text{Arc tan } \frac{1}{x}$  مفروض است، کدام گزینه صحیح است؟

- (1) نقطه  $x = 0$  یک نقطه عطف تابع است.
- (2)  $x = 0$  یک نقطه max تابع است.
- (3) به ازای  $x$  های کمتر و بیشتر از صفر جهت تقعر و تحدب منحنی تغییر می کند.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

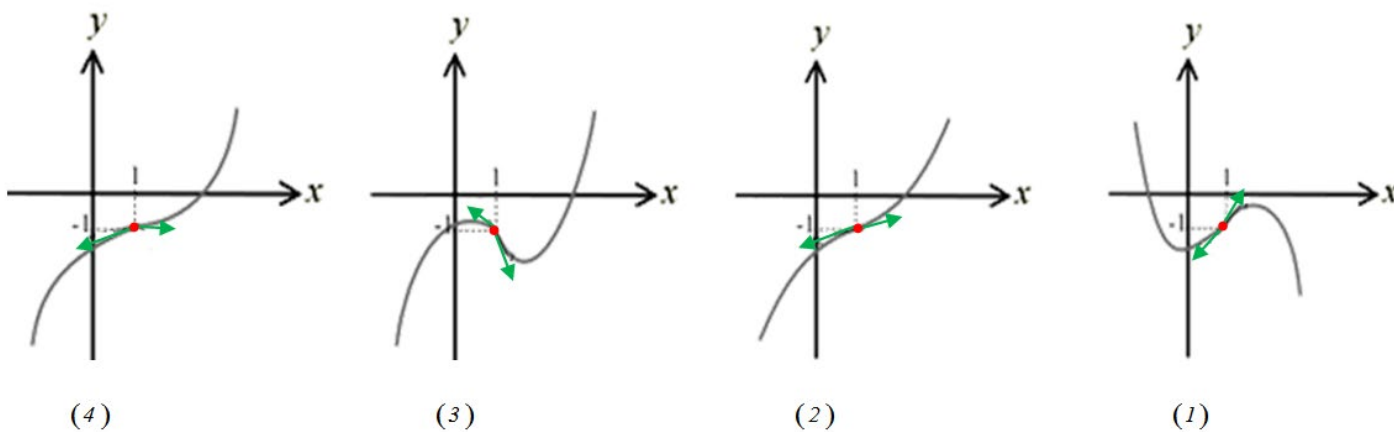
**مثال 41** مطابق شکل، نمودار تابع  $f$  در  $x = a$  بر محور  $x$  مماس است، کدام گزینه همواره صحیح است؟



- (1)  $f''(a) > 0$  ,  $f'(a) = 0$
- (2)  $f''(a) = 0$  ,  $f'(a) > 0$
- (3)  $f'(a) = f''(a) = 0$
- (4)  $f'(a) = 0$  اما ممکن است  $f''(a)$  موجود نباشد.

**مثال 42** اگر تابع  $f$  دو بار مشتق پذیر بوده و در شرایط زیر صدق کند  $f(1) = -1$  و  $f'(1) = 1$  و  $f''(1) = 0$  و اگر  $x > 1$  آنگاه

$f''(x) > 0$  و اگر  $x < 1$  آنگاه  $f''(x) < 0$  در این صورت نمودار آن شبیه کدام یک از نمودارهای زیر می تواند باشد؟

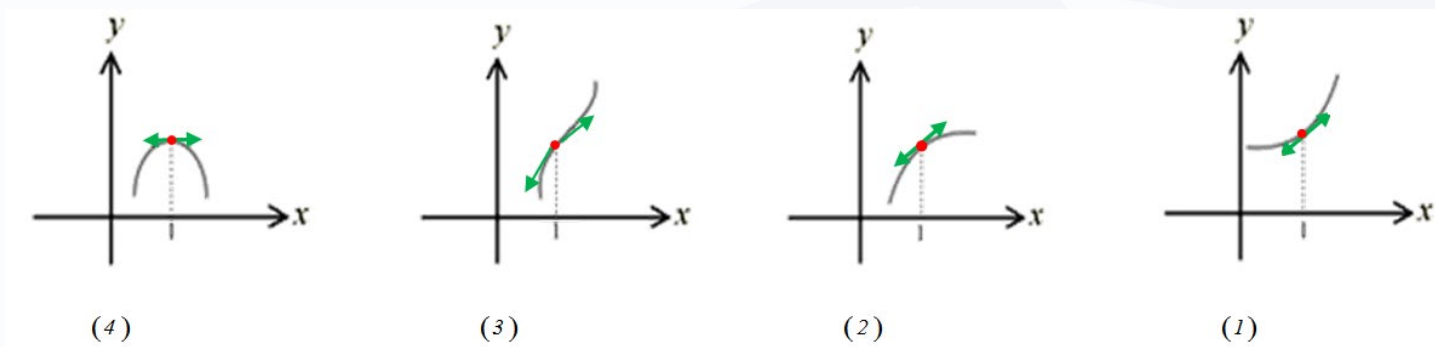


مثالها

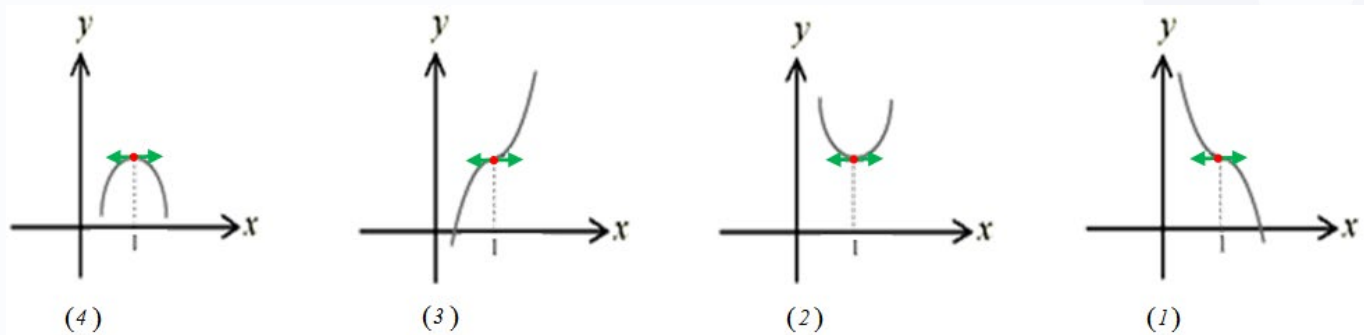
مثال 43 تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^3 & ; x \geq 0 \\ x^2 & ; x < 0 \end{cases}$  مفروض است، کدام گزینه صحیح است؟

- (1)  $f'(0)$  وجود ندارد.      (2)  $f''(0) = 0$       (3)  $f''(0) = 2$       (4)  $f_+''(0) = 6$

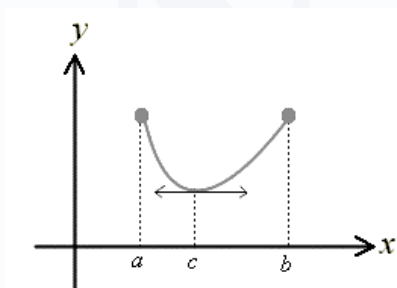
مثال 44 در تابع  $f$ ،  $f(1) = 1$  و  $f'(1) = 1$  و  $f''(1) = -1$  کدام نمودار تابع در همسایگی 1 است؟



مثال 45 تابع  $f$  با شرایط  $f(1) = 1$ ،  $f'(1) = 0$ ،  $f''(1) = 0$  و به ازای هر  $x$  از یک همسایگی محذوف 1 داریم  $f''(x) < 0$ ، نمودار تابع در همسایگی 1 کدام است؟



مثال 46 نمودار  $f$  در بازه  $(a, b)$  شامل  $c$  رسم شده است، کدام گزینه همواره صحیح است؟



- (1)  $f'(c) = 0$ ،  $f''(c) = 0$   
 (2)  $f'(c) > 0$ ،  $f''(c) > 0$   
 (3)  $f''(c) > 0$  و به ازای هر  $x$  از  $(c, b)$ ،  $f'(x) > 0$   
 (4) (3)، (1)

مثالها

**مثال 47)** اگر تابع  $f$  دو بار مشتق پذیر بوده و اگر  $x > 2$  آنگاه  $f'(x) > 0$  و  $f''(x) > 0$  و  $f''(2) = 0$  و اگر  $x < 2$  آنگاه

$f'(x) < 0$  و  $f''(x) > 0$  در این صورت معادله  $f$  کدام است؟

$$f(x) = 1 + (x - 2)^3 \quad (1)$$

$$f(x) = (x - 2)^5 \quad (2)$$

$$f(x) = 1 + (x - 2)^2 \quad (3)$$

$$f(x) = 1 + (x - 2)^4 \quad (4)$$

**مثال 48)** تابع  $f(x) = |x| \sqrt[3]{x}$  مفروض است، کدام گزینه همواره صحیح است؟

(1) در  $x = 0$  مشتق اول ندارد. (2)  $x = 0$  نقطه اکسترمم نسبی است.

(3) در  $x = 0$  مشتق دوم دارد و نقطه عطف است. (4) در  $x = 0$  مشتق دوم ندارد اما نقطه عطف است.

**مثال 49)** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sin x & ; x \leq 0 \\ \text{Arc tan } x & ; x > 0 \end{cases}$  در  $x = 0$ :

(1) ماکسیمم دارد. (2) مینیمم دارد. (3) نقطه عطف دارد. (4) مشتق پذیر نمی باشد.

**مثال 50)** تابع با ضابطه  $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$  مفروض است، کدام گزینه صحیح است؟

(1)  $f'(0) = -\infty$  (2) تابع یک ماکسیمم نسبی است (3)  $x = 0$  نقطه عطف است (4) تابع اکیداً یکنوا است.

**مثال 51)** تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x > 0 \\ x^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$  مفروض است، کدام گزینه صحیح است؟

(1) تابع در  $x = 0$  پیوسته نمی باشد. (2)  $x = 0$  نقطه مینیمم نسبی و عطف تابع است.

(3) در نقطه  $x = 0$  جهت تقعر و تحدب منحنی تغییر نمی کند. (4)  $x = 0$  نقطه مینیمم نسبی و در این نقطه جهت تقعر تغییر می کند.

**مثال 52)**  $f$  تابعی فرد روی  $R$  است و دوبار مشتق پذیر و با مشتق پیوسته است. اگر  $f'(1) = 1$ ،  $(1, 3)$  نقطه عطف  $f$  باشد کدام

همواره صحیح است؟

(1)  $(-1, -3)$  نیز نقطه عطف  $f$  است و  $f'(-1) = -1$  (2)  $(-1, 3)$  نیز نقطه عطف  $f$  است و  $f'(-1) = 1$

(3)  $(-1, -3)$  نقطه عطف  $f$  است و  $f'(-1) = 1$  (4)  $(-1, -3)$  نقطه عطف  $f$  است و  $f'(-1) = -1$

مثال‌ها

**مثال 53** تابع با ضابطه  $f(x) = x - \text{Arc tan } x$  مفروض است، تقعر منحنی در هر یک از بازه های  $[1, 2]$  ,  $[-2, -1]$  به ترتیب چگونه است ؟

- (1) در هر دو فاصله به بالا است .  
 (2) در هر دو فاصله به پایین است .  
 (3) در اولی به بالا و در دومی به پایین است .  
 (4) در اولی به پایین و در دومی به بالا است .

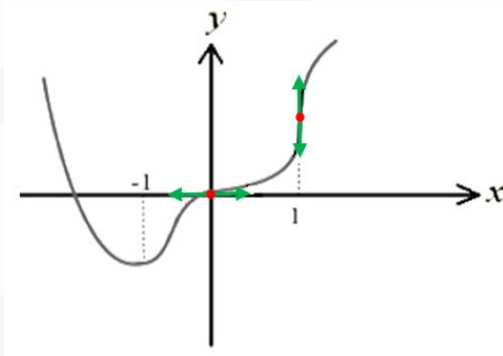
**مثال 54**  $f$  روی  $R$  دارای مشتق اول و دوم است و  $f''(x) > 0$  اگر  $x \neq 2$  و  $g(x) = f(2) + f'(2)(x-2)$  آنگاه کدام صحیح است؟

- (1) به ازای هر  $x$  ،  $f'(x) > g(x)$   
 (2) به ازای هر  $x$  ،  $f(x) > g(x)$   
 (3) به ازای هر  $x$  ،  $f(x) < g(x)$   
 (4) به ازای هر  $x$  ،  $f'(x) = g'(x)$

**مثال 55** تابع  $f$  دوبار مشتق پذیر و بازای هر  $x > 0$  ،  $f''(x) > 0$  و  $f'(0) = 1$  ،  $f(0) = 0$  در این صورت تابع با ضابطه  $g(x) = f(x) - x$  به ازای هر  $x > 0$  :

- (1) اکیداً نزولی است .  
 (2) اکیداً صعودی است .  
 (3) ثابت است .  
 (4) همواره منفی یا صفر است .

**مثال 56**  $f$  تابعی پیوسته است و نمودار آن در مقابل رسم شده است ، کدام گزینه صحیح است؟



- (1) تابع دو نقطه عطف دارد .  
 (2)  $f'(0) = 0$  و حتماً  $f''(0)$  موجود است .  
 (3)  $f'(1) = -\infty$   
 (4) در بازه  $(0,1)$  تابع  $f'$  اکیداً صعودی است .

**مثال 57** کدام یک از گزاره های زیر صحیح است ؟

- (1) در هر نقطه ای که جهت تقعر یا تحدب منحنی تغییر کند آن نقطه یک نقطه عطف تابع است .  
 (2) اگر  $(c, f(c))$  نقطه عطف یک تابع باشد  $f''(c) = 0$  است.  
 (3) در هر نقطه عطف جهت تقعر و تحدب منحنی تغییر می کند.  
 (4) در هر نقطه ای که تابع پیوسته و در آن نقطه  $f''$  تغییر علامت دهد آن نقطه یک نقطه عطف تابع است .