

مثالها

مثال 1) آهنگ آنی تغییر حجم استوانه ای نسبت به ارتفاع آن چقدر است؟

مثال 2) در دایره ای:

الف) اگر شعاعش از 2cm تا 4cm تغییر کند، آهنگ تغییر مساحت آن را محاسبه کنید.

ب) آهنگ آنی تغییر مساحت آن را نسبت به r در $r = 4$ بدست آورید.

مثال 3) سطح و حجم کره ای به شعاع R از رابطه $S = 4\pi R^2$ و $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ بدست می آید. آهنگ آنی تغییر S و V نسبت

به R وقتی $R = 5$ باشد، چقدر است؟

مثال 4) معادله حرکت متحرکی بر حسب زمان به صورت $f(t) = t^2 + 3\sqrt{t}$ می باشد:

الف) سرعت متوسط (آهنگ متوسط) متحرک را در فاصله زمانی $t = 1$ تا $t = 4$ بدست آورید.

ب) سرعت آنی (آهنگ لحظه ای) متحرک را در لحظه $t = 4$ بدست آورید.

مثال 5) آهنگ لحظه ای تغییر در تابع با ضابطه $y = |x|$ را در $x = 0$ پیدا کنید .

x	1	1.01
$f(x)$	2	2.051

مثال 6) در جدول زیر دو نقطه از تابع $y = f(x)$ داده شده است ، مقدار تقریبی $f'(1)$ را بدست آورید ؟

مثال 7) اگر ضلع مکعبی از 3 سانتی متر به 3.1 سانتی متر افزایش یابد آهنگ متوسط تغییر حجم در هر سانتی متر تغییر طول چقدر

است ؟

مثال 8) در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از 4 به 25 تغییر می کند، برابر آهنگ لحظه ای در نقطه

$x = a$ است، a کدام است؟

-1 (4)

2 (3)

$\frac{49}{4}$ (2)

$\frac{49}{3}$ (1)

مثالها

مثال 9 در تابع با ضابطه $f(t) = \frac{240}{t}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر t از 3 تا 5 تغییر می کند، چقدر از آهنگ لحظه ای در نقطه

$t = 4$ کمتر است؟

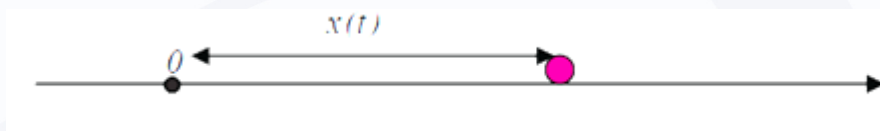
1 (4

27 (3

30 (2

31 (1

مثال 10 متحرکی روی محور x طبق ضابطه $x(t) = t^2 - 1$ حرکت می کند. یعنی متحرک در لحظه t در مکان $x(t)$ قرار دارد. $x(t)$ را تابع حرکت متحرک می نامند.



- 1- لحظه t را به طور ثابت در نظر بگیرید. سرعت متوسط متحرک بین دو زمان $t+h, t$ (عددی ناصفر و کوچک) را بنویسید.
- 2- با نزدیک کردن h به صفر مقدار بالا به چه عددی نزدیک می شود؟
- 3- عدد بالا با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه ای دارد؟
- 4- سرعت این متحرک در هر لحظه با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه ای دارد؟

مثال 11 نقطه $M(x, y)$ را بر نمودار تابع $y = x^2$ انتخاب می کنیم و تصاویر M را بر ox و oy به ترتیب A و B می نامیم ($x > 0$). اگر S اندازه مساحت مستطیل $OAMB$ باشد S را به صورت تابعی از x مشخص کنید. آهنگ تغییر S نسبت به x و آهنگ لحظه ای تغییر را در $x = 4$ به دست آورید.

مثال 12 یک بادکنک کره ای شکل را باد کرده ایم تا به شکل کره ای به شعاع 10 سانتی متر در آمده است. اگر به باد کردن آن ادامه دهیم به طوری که در هر ثانیه یک میلی متر به شعاع آن افزوده شود، آهنگ متوسط تغییر مساحت این بادکنک را در 20 ثانیه اول به دست آورید.

آهنگ لحظه ای افزایش مساحت سطح کره را در ثانیه 10 حساب کنید.

مثال 13 حجم آب یک استخر در حال تخلیه بر حسب لیتر به وسیله برابری $V = 120(2500 - 50t + t^2)$ به زمان t بر حسب دقیقه بستگی دارد. آهنگ متوسط تخلیه در 8 دقیقه اول را پیدا کنید. آهنگ لحظه ای خالی شدن را در دقیقه دهم از آغاز تخلیه به دست آورید.

مثالها

مثال 14) توپی را با سرعت اولیه 30 متر در ثانیه به طور قائم از زمین به بالا پرتاب می کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، معادله حرکت به شکل $s = -\frac{1}{2}gt^2 + 30t$ است که در آن $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ شتاب گرانش زمین است.

بنابراین $x = f(t) = -4.9t^2 + 30t$ مطلوب است

محاسبه:

الف) سرعت لحظه ای توپ در پایان یک ثانیه پس از پرتاب.

ب) سرعت لحظه ای توپ در پایان 3 ثانیه پس از پرتاب.

مثال 15)

الف) توپ تنیسی را به هوا پرتاب کرده ایم. اگر مسافت پیموده شده به وسیله توپ، بر حسب متر، تابعی از زمان

t بر حسب ثانیه به صورت $s = 12t - 3t^2$ باشد، سرعت متوسط توپ را در 2 ثانیه اول به دست آورید.

ب) سرعت آن را در لحظه t حساب کنید. در چه زمانی این سرعت صفر می شود و در چه ارتفاعی؟

ج) در لحظه $t = 4$ ثانیه پس از پرتاب، وضعیت توپ چگونه است و سرعت آن چقدر است؟

مثال 16) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است.

الف) سرعت لحظه ای این متحرک را در لحظه t بدست آورید.

ب) در چه زمانی، سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

مثال 17) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 3$ چقدر است؟

مثال 18) تابعی $P(t) = 3000 + 100t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t است. (t بر حسب ساعت)

الف) محاسبه آهنگ متوسط افزایش جمعیت در 5 ساعت اول پس از زمان $t_0 = 2$

ب) محاسبه آهنگ لحظه ای افزایش جمعیت در $t = 3$.

مثال‌ها

مثال 19) خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ بر حسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان-زمان:



الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی $[1, 2]$ و $[1, 1/5]$ و $[1, 1/4]$ به دست آورید.

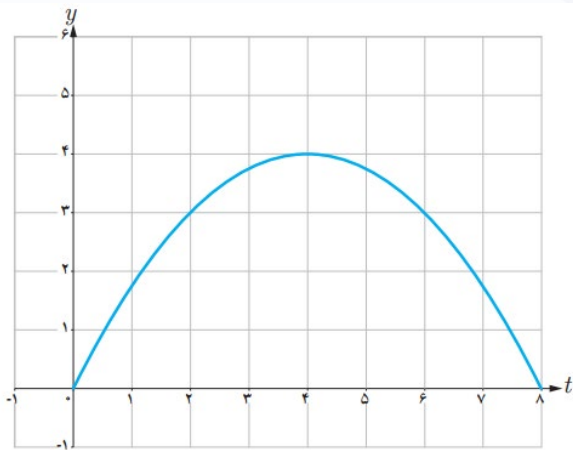
ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند $[1, 1/3]$ ، $[1, 1/2]$ و اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t = 1$ به دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ و $t = 3$ چقدر است؟

مثالها

مثال 20) نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :
(محاسبه عددی لازم نیست.)



- A سرعت متوسط بین $t = 1$ و $t = 3$
- B سرعت متوسط بین $t = 5$ و $t = 6$
- C سرعت متوسط بین $t = 1$
- D سرعت متوسط بین $t = 3$
- E سرعت متوسط بین $t = 5$
- F سرعت متوسط بین $t = 6$

مثال 21) توپی از یک پل به ارتفاع 11 متر به هوا پرتاب می شود. $f(t)$ نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t	ثانیه s	0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6
$f(t)$	متر m	11	12/4	13/8	15/1	16/3	17/4	18/4

بر اساس جدول، کدام یک از مقادیر زیر می تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان 0.4 ثانیه است، نشان دهد؟

د) $16/03m/s$

ج) $11/5m/s$

ب) $14/91m/s$

الف) $1/23m/s$

مثالها

مثال 22) گنجایش ظرفی 40 لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس

از t ثانیه از رابطه $V = 40 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟