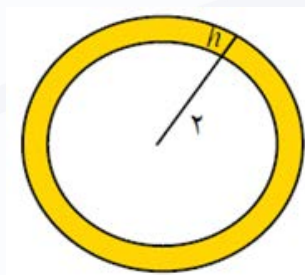


## مثالها

**مثال 1** آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۸ واحد است به دست آورید .

**مثال 2** مساحت یک دایره تابعی از شعاع آن است . دایره به شعاع  $r$  دارای مساحت  $S(r) = \pi r^2$  است .

۱- اگر دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر داشته باشیم و شعاع آن را  $h$  سانتی متر افزایش دهیم ، مساحت آن چقدر افزایش می یابد ( بر حسب  $h$  به دست می آید)؟



۲- نسبت افزایش مساحت دایره به افزایش شعاع چقدر است؟

این مقدار را آهنگ تغییرات متوسط مساحت دایره بین دو شعاع ۲ و  $2+h$  می نامند .

۳- آهنگ تغییرات متوسط مساحت دایره بین دو شعاع ۲ و  $2+h$  وقتی  $h$  را به صفر نزدیک می کنیم به چه عددی نزدیک می شود ؟

این عدد را آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به شعاع ، در شعاع ۲ سانتی متر می نامند .

۴- آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به شعاع ، با مشتق  $S(r)$  چه رابطه ای دارد ؟

**مثال 3** محیط هر دایره ای تابعی از مساحت آن است . آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره ای به مساحت  $\pi$  حساب کنید .

**مثال 4** مساحت هر دایره ای تابعی از محیط آن است . اگر مساحت را با  $S$  و محیط را با  $P$  نشان دهیم داریم

$$S(p) = \frac{1}{4\pi} P^2$$

**مثال 5** بادکنکی کروی توسط تلمبه ای در لحظه  $t = 0$  شروع به باد شدن می کند . هر ثانیه ۴ سانتی متر مکعب هوا

وارد بادکنک می شود . حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می کند  $4500\pi$  سانتی متر مکعب است .

آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است ؟

آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک ( در هر مقداری از سطح بادکنک) چقدر است؟

در آخرین لحظه که بادکنک می ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چقدر است ؟

## مثالها

**مثال 6)** در مثلثی طول دو ضلع آن 2 و 4 می باشد و طول ضلع سوم مقدار متغیر  $l$  می باشد. زاویه مقابل به این ضلع را با  $\alpha$  نشان می دهیم.

الف)  $l$  تابعی از  $\alpha$  است این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

ب) تابع وارون تابع قسمت (الف) چه چیزی را نشان می دهد؟

ج) مساحت این مثلث تابعی از  $\alpha$  است، این تابع را حساب کنید و آهنگ تغییرات آن را به دست آورید.

د) آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای  $\alpha$  مثبت است و معنای آن چیست؟

ر) آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای  $\alpha$  منفی است و معنای آن چیست؟

ه) آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای  $\alpha$  صفر است و مثلث در این مقدار چگونه است و مساحت آن چه ویژگی دارد؟

**مثال 7)** مثلثی ساخته ایم که طول دو ضلع آن 1 و 3 می باشد و زاویه بین این دو ضلع  $\alpha$  است که قابل تغییر از صفر تا  $\pi$  رادیان است. طول ضلع سوم را  $l$  بنامید.

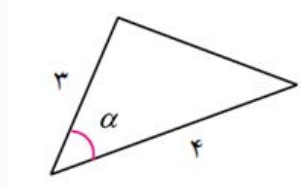
الف)  $l$  را بر حسب  $\alpha$  و آهنگ تغییرات  $l$  نسبت به  $\alpha$  را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

ب)  $\alpha$  را بر حسب  $l$  و آهنگ تغییرات  $\alpha$  نسبت به  $l$  را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

ج) آهنگ تغییرات در (الف) و (ب) چه رابطه ای با هم دارند؟

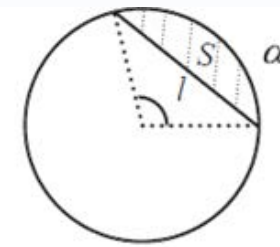
مثال‌ها

**مثال 8)** مثلثی ساخته ایم که طول دو ضلع آن 3 و 4 است و زاویه بین آن‌ها را مقدار متغیر  $\alpha$  قرار می‌دهیم.



- الف) آهنگ تغییرات مساحت این مثلث نسبت به  $a$  را در زاویه  $\alpha$  به دست آورید.  
 ب) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات منفی است و معنای آن چیست؟  
 ج) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات مثبت است و معنای آن چیست؟  
 د) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات صفر است و در این زاویه مساحت مثلث به دست آمده چه ویژگی دارد؟

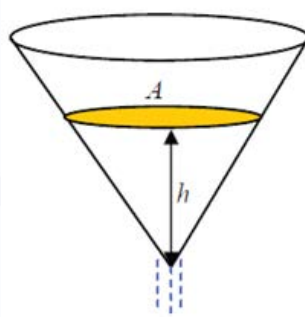
**مثال 9)** در شکل زیر وتری از دایره به شعاع واحد به طول  $l$  رسم شده است که کمانی به زاویه  $\alpha$  را از دایره جدا کرده است. مساحت قسمت هاشور خورده را با  $S$  نشان می‌دهیم.



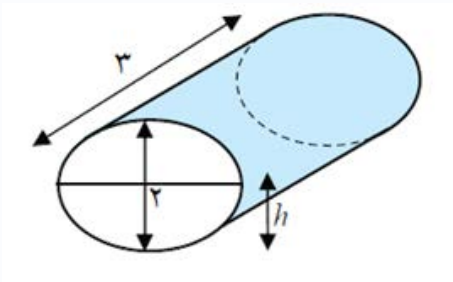
- الف)  $S$  را بر حسب  $\alpha$  و  $\alpha$  را بر حسب  $l$  و  $S$  را بر حسب  $l$  حساب کنید.  
 ب) آهنگ تغییرات  $S$  را نسبت به  $\alpha$  و آهنگ تغییرات  $\alpha$  را نسبت به  $l$  و آهنگ تغییرات  $S$  را نسبت به  $l$  را حساب کنید.

مثالها

**مثال 10** قیفی به شکل مخروط دوار داریم که ارتفاع آن ۱۰ سانتی متر است و شعاع قاعده آن ۵ سانتی متر است. این قیف را پر از آب می کنیم و در لحظه  $t = 0$  شیر را باز می کنیم و آب با سرعت دو سانتی متر مکعب در ثانیه از آن خارج می شود. اگر ارتفاع آب باقیمانده در قیف را با  $h$  نشان می دهیم، حجم آب باقی مانده را بر حسب  $h$  به دست آورید.



**مثال 11** یک منبع گازوئیل به شکل استوانه در اختیار داریم که به شکل خوابیده روی زمین قرار دارد. قطر دایره قاعده آن دو متر و ارتفاع آن (که به طور افقی روی زمین است) برابر ۳ متر است.



- الف) اگر منبع خالی را به گونه ی پر کنیم که ارتفاع گازوئیل با سرعت ثابت 3 سانتی متر بر دقیقه افزایش یابد، سرعت افزایش حجم گازوئیل در هر لحظه  $t$  چقدر خواهد بود؟
- ب)  $h$  را بر حسب زمان به دست آورید و آهنگ تغییرات  $h$  را نسبت به زمان در هر لحظه حساب کنید.
- ج) سطح آب باقیمانده در قیف را با  $A$  نشان می دهیم. با محاسبه  $A$  بر حسب زمان، آهنگ تغییرات  $A$  را نسبت به زمان در هر لحظه حساب کنید.
- د) با محاسبه  $A$  بر حسب  $h$ ، آهنگ تغییرات  $A$  را نسبت به  $h$  در هر مقداری از  $h$  حساب کنید.

**مثال 12** اگر شعاع کره ای با آهنگ  $0.3 \text{ cm/s}$  زیاد شود، در لحظه ای که شعاع برابر  $4 \text{ cm}$  باشد، حجم کره با چه آهنگی زیاد می شود؟

**مثال 13** یک سنگ ریزه داخل آب می اندازیم، موج دایره ای شکلی ایجاد می شود که شعاعش با سرعت  $2 \text{ cm/s}$  افزایش می یابد، آهنگ تغییر مساحت راهنگامی که شعاع  $R = 3 \text{ cm}$  می باشد، چقدر است؟

مثالها

**مثال 14)** سطح یک بالن کروی با آهنگ  $k$  متر مربع در ثانیه افزایش می یابد ، حجم آن وقتی شعاع برابر  $r$  متر باشد با چه آهنگی افزایش می یابد.

**مثال 15)** توپی کروی به شعاع  $r$  مفروض است. فرض کنیم هوا با آهنگ 36 متر مکعب بر ثانیه از توپ خارج می شود ، در اینصورت شعاع توپ با چه سرعتی وقتی  $r = 6$  است، کاهش می یابد؟

**مثال 16)** آهنگ تغییر مساحت یک مستطیل را در لحظه ای که طول 8 و عرض 6 می باشد و طول با سرعت  $3m/s$  و عرض با سرعت  $5m/s$  افزایش می یابد را پیدا کنید.

**مثال 17)** طول و عرض مکعب مستطیلی به ترتیب با سرعتهای 2 و 4 متر بر ثانیه افزایش می یابند و ارتفاع آن با سرعت  $3m/s$  کاهش می یابد ، در زمانی که طول و عرض و ارتفاع به ترتیب 4,2,5 متر باشند آهنگ تغییر حجم مکعب مستطیل بر حسب متر مکعب بر ثانیه چقدر است؟

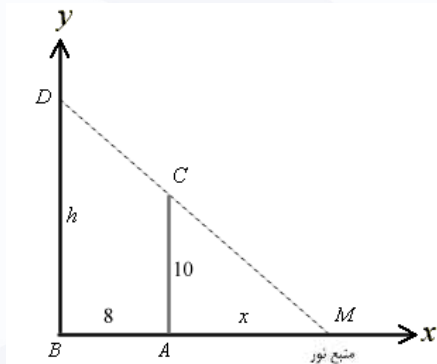
**مثال 18)** در مثلث قائم الزوایه  $ABC$  ،  $\angle A = 90^\circ$  ، اندازه وتر 3 متر است . اگر آهنگ تغییر یک زاویه حاده  $0.2 m/s$  باشد آهنگ تغییر ضلع مقابل به آن زاویه وقتی اندازه زاویه  $\frac{\pi}{3}$  است را بدست آورید.

**مثال 19)** متحرکی روی منحنی  $y^3 + x^3 = 35$  حرکت می کند ، اگر آهنگ تغییر مولفه  $x$  آن  $4m/s$  باشد، آهنگ تغییر مولفه  $y$  آن چقدر است ، در صورتی که متحرک در نقطه ای به عرض 2 روی منحنی باشد؟

**مثال 20)** در یک مثلث قائم الزوایه اندازه یک ضلع زاویه قائم 20 واحد است ، اگر آهنگ تغییر زاویه حاده  $\theta$  مقابل به ضلع دیگر زاویه قائم 0.04 واحد بر ثانیه باشد، در زمانی که اندازه وتر 60 واحد باشد ، آهنگ تغییر ضلع مقابل به زاویه  $\theta$  چقدر است؟

مثالها

**مثال 21** مطابق شکل یک منبع نورانی روی زمین به دیواری به ارتفاع  $10m$  که مقابل آن قرار دارد می تابد و سایه دیوار روی ساختمان مقابل آن به ارتفاع  $h$  می باشد.



فاصله پای دیوار از پای ساختمان  $8m$  است ، اگر منبع نورانی وقتی به فاصله  $16m$  از دیوار واقع است ، با سرعت  $12m/s$  از دیوار دور می شود آنگاه تغییر سایه روی دیوار چقدر است.  
 اگر فاصله منبع نور را تا دیوار  $x$  فرض کنیم وقتی  $x \rightarrow \infty$  یا  $x \rightarrow 0^+$  حد  $h$  چقدر است.  
 فرض کنیم ارتفاع ساختمان نامتناهی باشد.