

مثالها

مثال) عبارت‌های زیر را ساده کنید.

1) $\frac{1}{b} + \frac{4}{3b}$

2) $\frac{4}{3x^2y} - \frac{3}{2xy}$

3) $\frac{a+b}{a} - \frac{a+b}{b}$

4) $\frac{1}{a^2-1} + \frac{2a}{a^2+2a+1} - \frac{2}{a+1}$

5) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{8}{x^2+2x-3}$

6) $\frac{a+5}{a-1} - \frac{6}{a^2+a+1} - \frac{6(a^2+2)}{a^3-1}$

مثال 7) به ازای چه مقداری برای x مقدار عبارت $\frac{x}{x+1}$ برابر 8 می‌شود؟

مثال 8) فرض کنید A و B عبارت‌های گویایی به صورت $A = \frac{x}{x-1}$ و $B = \frac{x^2}{x^2+1}$ باشند. عبارت گویای C را چنان تعیین کنید که تساوی $A + C = B$ برقرار شود.

مثال 9) اگر $A = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $B = \frac{2x}{1+x^2}$ باشند، ثابت کنید: $A^2 + B^2 = 1$

مثال 10) عبارت گویایی بیابید که اگر با $\frac{x+1}{x-1}$ جمع شود، حاصل آن برابر 3 شود.

مثال 11) نشان دهید قدر مطلق تفاضل معکوس دو عدد طبیعی متوالی برابر است با معکوس حاصل ضرب آن‌ها.

مثال 12) اگر نسبت $2x - y$ به $x + y$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، نسبت x به y چقدر است؟

مثالها

مثال 13) دانش آموزی در برگه امتحانی خود به صورت زیر نوشته است. اشتباهات او را توضیح دهید.

الف) $\frac{x+3}{2x+5} + \frac{x+2}{2x+5} = \frac{2x+5}{2x+5} = 0$

ب) $\frac{3x+1}{2} - \frac{1-x}{2} = \frac{3x+1-1-x}{2} = \frac{2x}{2} = x$

مثال 14) یک حوض را در نظر بگیرید که توسط دو شیر آب پر می شود. فرض کنید شیر اول به تنهایی در a ساعت حوض را پر می کند و شیر دوم به تنهایی در b ساعت حوض را پر می کند و اگر این دو شیر را با هم باز کنیم حوض در x ساعت پر خواهد شد. با انجام مراحل زیر می خواهیم x را بر حسب a و b حساب کنیم.

1- شیر اول به تنهایی در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می کند؟

2- شیر دوم به تنهایی در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می کند؟

3- هر دو شیر با هم در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می کند؟

4- وقتی هر دو شیر با هم باز هستند در x ساعت حوض پر می شود، در یک ساعت چه کسری از حوض پر می شود؟

5- با توجه به محاسبات بالا، رابطه ریاضی بین x و a و b را بنویسید.

مثال 15) مخزن آبی دو شیر دارد. اگر یکی از این شیرها را باز کنیم در 90 دقیقه 100 لیتر آب را تخلیه می کند و اگر دو شیر را با هم باز کنیم 100 لیتر آب را در 20 دقیقه تخلیه می شود. اگر شیر دوم را به تنهایی باز کنیم، در چند دقیقه 100 لیتر آب تخلیه خواهد شد.

مثال) تساویهای زیر را ثابت کنید:

16) $\frac{1}{x} + \frac{3x}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{3x+1}{x+1}$

17) $\frac{2x^3 - x^2}{x^4 + x^3} - \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} + \frac{x-1}{x^2 - 1} = \frac{3-x}{x+1}$

18) $1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

19) $\frac{30a}{9a^2 - 1} + \frac{4}{3a - 1} - \frac{5}{3a + 1} = \frac{9}{3a - 1}$

20) $\frac{x}{x^2 + 5x + 6} + \frac{15}{x^2 + 9x + 14} - \frac{12}{x^2 + 10x + 21} = \frac{1}{x+2}$

21) $\frac{a^2 + ac}{a^2c - c^3} - \frac{a^2 - c^2}{a^2c + 2ac^2 + c^3} + \frac{2c}{c^2 - a^2} - \frac{3}{a+c} = 0$

22) $\frac{x}{x^2 - y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x^3 + y^3}{y^4 - x^4} + \frac{xy}{(x+y)(x^2 + y^2)} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$

مثالها

$$23) (a^2 - x + \frac{2x^2}{a^2 + x})(a^2 + x) = a^4 + x^2$$

$$24) (\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2})(\frac{1}{x} - 1) = \frac{1}{x}$$

$$25) \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{a^2 + a - 1}{a^3 - a^2 + a - 1} + \frac{a^2 - a - 1}{a^3 + a^2 + a + 1} - \frac{2a^3}{a^4 - 1} = \frac{a}{a^2 - 1}$$

$$26) \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} (1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}) = \frac{(a+b+c)^2}{2bc}$$

$$27) \frac{bc}{(a-c)(a-b)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1$$

$$28) \frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)} = 0$$

$$29) \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} - \frac{a^2 - ab + b^2}{a-b} + \frac{2b^3 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2} = 1$$

$$30) \frac{3a-6b}{a+b} - \frac{5a-6b}{a-b} - \frac{4a-5b}{a+b} + \frac{7a-8b}{a-b} = 1$$

$$31) \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x \right) = 3$$

$$32) \left(\frac{a+b}{2a-2b} - \frac{a-b}{2a+2b} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \right) \times \frac{(a-b)^2}{2b} = a-b$$

$$33) \frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} - \frac{4x}{x^2-1} + \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$34) \frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} + \frac{2a^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2}{a^4-b^4} = \frac{2a}{a-b}$$

مثالها

$$35) \frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)} = 1$$

$$36) \frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)}{a^2(a^2 - b^2)} + \frac{(x^2 - b^2)(y^2 - b^2)}{b^2(b^2 - a^2)} = 1$$

$$37) \frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

$$38) \frac{1+a}{(a-b)(a-c)} + \frac{1+b}{(b-c)(b-a)} + \frac{1+c}{(c-a)(c-b)} = 0$$

$$39) \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$$

$$40) \frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^4 - (x-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^2 - (x^2+1)^2} = 1$$

$$41) \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{b^2 - a^2}\right) \frac{a}{a-b} + \left(\frac{b}{b-a} + \frac{2ab}{a^2 - b^2}\right) = 1$$

$$42) \left[\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right)^{-1}\right] \left[\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{x-y}\right)\right]^{-1} = 1$$

$$43) \left(\frac{a^2 - 6a + 5}{a^2 - 7a + 10} - \frac{a^2 - 6a + 8}{a^2 - 5a + 4}\right) \div \frac{1}{a^2 - 3a + 2} = 2a - 3$$

$$44) \left(\frac{b}{a+b} + a\right)\left(\frac{a}{a-b} - b\right) - \left(\frac{a}{a+b} + b\right)\left(\frac{b}{a-b} - a\right) = 2a$$

$$45) \frac{y^2}{x^3 - y^3} + \frac{x^3y^2}{y^6 - x^6} = \frac{y^5}{(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)}$$

مثالها

$$46) 1 - 2x + x^2 + \frac{1 - x^4}{1 + 2x + x^2} = \frac{2(1 - x)}{1 + x}$$

$$47) \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1} \times \frac{1 + \frac{y}{x}}{x - y} \div \frac{1 + \frac{y^3}{x^3}}{\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}} = 1$$

$$48) \frac{5}{(x^{-1} + y^{-1})^{-1}} = \frac{5(x + y)}{xy}$$

$$49) (1 - x + \frac{4 + x^2}{1 + x})(1 - x^2) = 5(1 - x)$$

$$50) \frac{1}{(a - b)(a - c)} + \frac{1}{(b - a)(b - c)} + \frac{1}{(c - a)(c - b)} = 0$$

$$51) \left(1 - \frac{a - b}{a + b}\right) \div \left(\frac{a + b}{a - b} - 1\right) = \frac{a - b}{a + b}$$

$$52) \frac{b + c}{bc}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{c + a}{ca}(c^2 + a^2 - b^2) + \frac{a + b}{ab}(a^2 + b^2 - c^2) = 2(a + b + c)$$

$$53) \frac{1}{a^2bc} + \frac{1}{ab^2c} + \frac{1}{abc^2} = \frac{bc + ac + ab}{a^2b^2c^2}$$

$$54) \frac{3a}{a^2 - 16} - \frac{2}{(a - 4)} = \frac{(a - 8)}{(a - 4)(a + 4)}$$

$$55) \frac{a}{3 + a} + \frac{a}{3 - a} + \frac{2a^2}{9 - a^2} = \frac{2a}{3 - a}$$

$$56) \frac{3x}{x + 2} + \frac{12x}{x^2 - 4} - \frac{3x^2 - 12}{x^2 - 4} = \frac{6}{(x - 2)}$$

$$57) \frac{a + 5}{a - 1} - \frac{6}{a^2 + a + 1} - \frac{6(a^2 + 2)}{a^3 - 1} = 1$$

$$58) 1 - x - x^2 - \frac{x^3}{1 + x} = \frac{1}{1 + x}$$

$$59) 1 - 2x + x^2 + \frac{1 - x^4}{1 + 2x + x^2} = \frac{2(1 - x)}{1 + x}$$

مثالها

$$60) \frac{x-2y}{xy} + \frac{3y-a}{ay} - \frac{3x-2a}{ax} = 0$$

مثال 61) با فرض $a^2 + b^2 + c^2 = 2S^2$, $a+b+c = 2S$ ثابت کنید:

$$(S^2 - a^2)(S^2 - b^2) + (S^2 - b^2)(S^2 - c^2) + (S^2 - c^2)(S^2 - a^2) = 4S(S-a)(S-b)(S-c)$$

مثال 62) عبارت $(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$ را ساده کنید.

مثال 63) ثابت کنید اگر $a+b+c=0$ باشد، خواهیم داشت: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$

مثال) با فرض $a+b+c=0$ ثابت کنید:

$$64) 2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$65) 10(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5)$$