

مثالها

**مثال** یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید ، در صورت یک به یک بودن ،ضابطه تابع معکوس آنها را به دست آورید.

8)  $f(x) = -|x-1|+1$  ;  $x \geq 1$

9)  $f(x) = |x-2|+3$

10)  $f(x) = |x-2|+3$  ;  $x \geq 2$

11)  $f(x) = (x-3)^2$

12)  $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$  ;  $x \in [0,1]$

13)  $g(x) = \frac{x-5}{2x+3}$

14)  $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

**مثال** ضابطه تابع معکوس توابع زیر را بدست آورید . ( فرض شده که تمام توابع زیر یک به یک هستند )

15)  $f(x) = \frac{3x-2}{5x-3}$

16)  $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$

17)  $y = 2x+3$

18)  $y = \frac{x+1}{x-2}$

19)  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

20)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

21)  $y = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 3$

22)  $y = x + [x]$

23)  $y = (x^2 - 1)^2$  ,  $x \geq 1$

24)  $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

25)  $y = \sqrt{1+x+2\sqrt{1+x}}$  ;  $x \geq -1$

26)  $y = \sin x - 2$

27)  $y = \text{Arc cos } \frac{x-1}{x+1}$

28)  $y = \sin \log_a x^3$

29)  $y = \sin(\cos x)$

30)  $y = 2 + \text{Arc sin}(x-1)$

31)  $y = 4^{2x}$

32)  $y = 1 - 2^{-x}$

33)  $y = 5 + 10^{x-1}$

34)  $f(x) = x^2 - 2x$  ;  $x \in [1,4]$

35)  $f(x) = x^4 - 2x^2$

36)  $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$

37)  $y = [x] + \sqrt{x - [x]}$

38)  $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$

39)  $y = \log_2(\sqrt{x^3 - 1})$  ;  $x > 1$

40)  $y = x^n + [x^n]$  ;  $n$

41)  $y = x + [3x]$  فرد

42)  $y = x + [mx]$

43)  $y = 2x + [x]$

44)  $y = 2x + [3x]$

45)  $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \sqrt{x}}}$

46)  $f(x) = (x - [x])^2 + [x]$

48)  $f(x) = 2^{\log_5 \sqrt[3]{x-1}}$

47)  $f(x) = x + \sqrt{x}$

**مثال 49** ثابت کنید تابع با ضابطه  $f(x) = \log_e(x + \sqrt{x^2 + 1})$  معکوس پذیر است و معکوس آن را پیدا کنید .

مثالها

**مثال 50** هر گاه  $f : X \rightarrow Y$  یک تابع پوشا باشد، آنگاه ثابت کنید:  $\forall Y_1, Y_2 \subseteq Y : \text{if } f^{-1}(Y_1) = f^{-1}(Y_2) \Rightarrow Y_1 = Y_2$

**مثال 51** هر گاه  $f : A \rightarrow B$  تابعی پوشا باشد، در صورتی که  $Y \subseteq B$  آنگاه ثابت کنید:  $f^{-1}(B - Y) = A - f^{-1}(Y)$

**مثال** اگر تابع  $f$  یک به یک باشد، معکوس توابع زیر را بدست آورید.

52)  $g(x) = 1 - 2f(3 - 4x)$

53)  $g(x) = \frac{2f(\sqrt{x})}{3 - 5f(\sqrt{x})}$

54)  $g(x) = \sqrt[3]{\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}$

55)  $g(x) = 1 - 2f\left(\frac{x}{1-3x}\right)$

**مثال 56** اگر  $g$  وارون پذیر باشد، وارون تابع با ضابطه  $f(x) = 1 - 3g(5x - 2)$  را پیدا کنید.

**مثال 57** اگر  $g$  تابعی وارون پذیر باشد و  $f(x) = g(x^3 + 1) + 2$  باشد:

اولاً  $f^{-1}(x)$  را محاسبه کنید.

ثانیاً در صورتی که  $g(9) = 4$  باشد مقدار  $f^{-1}(6)$  را محاسبه کنید.

**مثال 58**  $g$  تابعی وارون پذیر باشد، وارون  $f(x) = 3 + g(\sqrt{x} + 1)$  را محاسبه کنید، اگر  $g^{-1}(2) = 4$  آنگاه  $f^{-1}(5)$  را محاسبه کنید.

**مثال 59**  $g$  وارون پذیر و  $f(x) = \sqrt[3]{2 + g^{-1}(x^5)}$ . مطلوب است  $f^{-1}(2)$  به شرطی که  $g^{-1}(32) = 6$  همچنین  $f(x)$  را محاسبه کنید.

**مثال 60** تابع  $f(x) = ax + b ; a \neq 0$  داده شده است، همه مقادیر  $a, b$  را که به ازای آنها  $f^{-1}(x) = f(x)$  برابری بیابید.

**مثال 61** اگر  $f(6) = 12$  آن گاه ریشه های معادله  $f^{-1}\left(\frac{x}{x+2}\right) = 6$  را محاسبه کنید.

**مثال 62** هزینه اجاره دربست یک اتوبوس (برای هر نفر) به وسیله تابع  $C(x) = \frac{100 + 5x}{x}$  داده می شود که در آن  $x$  تعداد افراد در یک

گروه و  $C(x)$  بر حسب هزار تومان است و داریم:  $x \in \{1, 2, 3, \dots, 40\}$

$C^{-1}(x)$  را به دست آورید و توضیح دهید که چه چیزی را نشان می دهد؟

## مثال‌ها

**مثال 63)** یک سیلندر به شکل استوانه ای در اختیار داریم که ارتفاع آن برابر قطر قاعده آن است . شعاع قاعده این سیلندر را با نشان می دهیم .

الف) حجم این سیلندر استوانه ای شکل را به عنوان تابعی از  $x$  به دست آورید . برای شعاع قاعده 10 متر حجم استوانه چقدر است ؟

ب)  $V^{-1}(x)$  را به دست آورید و معنای آن را توصیف کنید.

ج) اگر حجمی برابر  $1024\pi$  متر مکعب نیاز داشته باشیم ، با استفاده از هر یک از فرمول ها که ساده تر است شعاع را بیابید .

**مثال 64)** وزن ایده آل  $W$  برای مردان (بر حسب کیلوگرم) به عنوان تابعی از قد  $h$  (بر حسب سانتی متر) به صورت تقریبی از رابطه

$$W(h) = 0.9h - 88$$

به دست می آید.

**مثال 65)** درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

الف) یک تابع زوج می تواند وارون پذیر هم باشد .

ب) اگر  $f$  روی بازه  $[0,5]$  صعودی باشد  $f^{-1}$  روی بازه  $[f(0), f(5)]$  صعودی است .

ج) اگر  $g$  روی بازه  $[0,5]$  نزولی باشد ،  $g^{-1}$  روی بازه  $[g(5), g(0)]$  نزولی است .

د) اگر  $f, g$  وارون یکدیگر باشند ، دامنه آن ها با هم برابر است .

**مثال 66)** در یک تابع خطی که نمودار آن از مبدا مختصات می گذرد ، داریم :  $f(3) = 15$  ، رابطه ای ریاضی برای وارون این تابع به دست آورید.