

مثالها

**مثال 1)** اگر  $f = \{(4,5), (6,5), (8,12), (10,2)\}$  و  $g = \{(4,6), (2,4), (6,8), (8,10)\}$  توابع  $fog, gof$  را حساب کنید.

**مثال 2)** اگر  $f = \{(2,3), (4,5), (1,2), (3,2)\}$  و  $g = \{(1,1), (2,7), (3,5)\}$  باشند، مطلوب است محاسبه  $fog$  و  $fof$ .

**مثال 3)** توابع  $f = \{(4,3), (5,7), (3,8)\}$  و  $g = \{(3,5), (4,6), (6,3)\}$  مفروضند، دامنه و برد توابع مرکب زیر را تعیین کنید.

3)  $fog$

4)  $gof$

5)  $fof$

6)  $(2f) \circ (3g)$

7)  $\left(\frac{f}{g}\right) \circ (g \cdot f)$

8)  $(2f) \circ (g-2)$

9)  $(f+g) \circ (f-g)$

**مثال 10)** در تابع  $f = \{(2,3), (3,5), (4,6), (5,1)\}$  مقدار عبارت  $A = \frac{f^2(3) - fof(3)}{fofof(2)}$  را بیابید.

**مثال 11)** اگر  $f = \{(1,0), (2,1), (0,2), (-1,-1)\}$  تابع  $\frac{fof}{f^2}$  را بیابید.

**مثال 12)** فرض کنیم  $g: N \rightarrow N$  تابعی با ضابطه  $g(n) = 2n$  باشد، اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و تابع  $f: A \rightarrow N$  به صورت  $f = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,7)\}$  تعریف شود، توابع  $2f + g$ ،  $gof$  را محاسبه کنید.

**مثال 13)** اگر  $f = \{(0,2), (1,4), (-1,3), (2,-1)\}$  و  $g(x) = \sqrt{9-x^2}$  باشد،  $f(g(x))$  و  $g(f(x))$  را بیابید.

**مثال 14)** ترکیب توابع و دامنه های خواسته شده را بدست آورید.

14)  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 2 \\ g(x) = 4x + 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{fog} = ? \\ f(g(x)) = ? \end{array} \right.$

15)  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{2x-3}{5} \\ g(x) = \frac{x}{x-1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{fog} = ? \\ f(g(x)) = ? \end{array} \right.$

مثالها

$$16) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x-1} \\ g(x) = x-1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g} = ? \\ f(g(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$17) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 2x^2 - x \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g} = ? \\ f(g(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$18) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x+3}{x-3} \\ g(x) = \frac{x-3}{x+3} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g} = ? \\ f(g(x)) = ? \end{array} \right. \quad 19) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sin 2x \\ g(x) = \sin x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g} = ? \\ f(g(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$20) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \tan x \\ g(x) = \cot x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g} = ? \\ f(g(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$21) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \\ g(x) = \sqrt{x(1-x)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g} = ? \\ f(g(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$22) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = \sqrt{7-x^2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{g \circ f} = ? \\ g(f(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$23) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x+2 \\ g(x) = x^2-3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g}, D_{g \circ f} = ? \\ f(g(x)), g(f(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$24) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 + x \\ g(x) = \sqrt{4x+1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g}, D_{g \circ f} = ? \\ f(g(x)), g(f(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$25) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x^2+5} \\ g(x) = \sqrt{4-x^2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g}, D_{g \circ f} = ? \\ f(g(x)), g(f(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$26) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ g(x) = \cos \pi x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g} = ? \\ f(g(x)) = ? \end{array} \right.$$

مثالها

$$27) f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 2 ; x \in \mathcal{Q} \\ 1 ; x \in \mathcal{R} - \mathcal{Q} \end{array} \right\} f \circ f = ?$$

$$28) f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x^2 ; x \in \mathcal{Q} \\ 0 ; x \in \mathcal{R} - \mathcal{Q} \end{array} \right\} (f \circ f)(x) = ? \quad 29) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x-1} \\ g(x) = \sqrt{2-x} \\ h(x) = x^2 ; D_h = [0,4] \end{array} \right\} (f \circ h \circ g)(x) = ?$$

$$30) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 1 \\ g(x) = \frac{x+1}{x-1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g}, D_{g \circ f}, D_{f \circ f} = ? \\ f(g(x)), g(f(x)), f(f(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$31) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \log x \\ g(x) = \text{Arc cos } x \end{array} \right\} D_{g \circ f} = ?$$

$$32) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x-3} \\ g(x) = \frac{2x+2}{x} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g}, D_{g \circ f} = ? \\ f(g(x)), g(f(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$33) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ g(x) = [x] + [-x] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g} = ? \\ f(g(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$34) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{4-x}} \\ g(x) = [x] \end{array} \right\} D_{f \circ g} = ?$$

$$35) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{1-x^2} \\ g(x) = [x] \end{array} \right\} D_{f \circ g} = ?$$

$$36) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x+1}{x-2} \\ g(x) = \frac{3}{x+4} \end{array} \right\} D_{f \circ g} = ?$$

$$37) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{1-x^2} \\ g(x) = \sqrt{x} \end{array} \right\} D_{(f+g) \circ f} = ?$$

$$38) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^3 ; 0 \leq x \leq 1 \\ g(x) = x^2 ; 0 \leq x \leq 2 \end{array} \right\} D_{f \circ g} = ?$$

مثالها

$$39) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}} \\ g(x) = \sin^2 \pi x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{fog} = ? \\ f(g(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$40) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 10^{-10 \log(\log x)} \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{fog}, D_{gof} = ? \\ f(g(x)), g(f(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$41) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 2^{\log_2 x} \\ g(x) = \frac{x-1}{x^2-x} \end{array} \right\} D_{fog}, R_{fog} = ?$$

$$42) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x-1} \\ g(x) = x^2 + 2 \\ h(x) = x + 3 \end{array} \right\} fogoh = ?$$

$$43) f(x) = \sin^2 \pi x ; x \geq 0 \Rightarrow f(-f(x)) = ?$$

$$44) f(n) = (-1)^n \left[ \frac{n}{2} \right], n \in \mathbb{N} \Rightarrow D_{fof} = ?$$

$$45) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x + 2 \\ g(x) = 2x - 3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (fog)(3) \\ (gof)(1) \end{array} \right\} = ?$$

$$46) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} ; R^+ \rightarrow R \\ g(x) = x^2 ; R \rightarrow R \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{fog}, D_{gof} = ? \\ f(g(x)), g(f(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$47) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 5 - x ; N \rightarrow Z \\ g(x) = x^2 - 3 ; [0, +\infty) \rightarrow [-3, +\infty) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} D_{fog}, D_{gof} = ? \\ f(g(x)), g(f(x)) = ? \end{array} \right.$$

$$48) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x + 2 ; [0, 1] \rightarrow R \\ g(x) = 1 - x ; [0, 1] \rightarrow R \end{array} \right\} g(f(x)) = ?$$

مثالها

مثال (49) اگر  $f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x \geq 0 \\ 5x & ; x < 0 \end{cases}$  و  $g(x) = x^2$  باشد، مطلوبست تشکیل تابع  $fog$ .

مثال (50) اگر  $f(x) = \begin{cases} x & ; x \geq 3 \\ 4x & ; x < 3 \end{cases}$  و  $g(x) = x^2 - 1$  باشد،  $f(g(x))$  و  $g(f(x))$  را بیابید.

مثال (51) اگر  $g(x) = \sin x$  و  $f(x) = \begin{cases} x + \pi & ; x \geq 0 \\ x - \pi & ; x < 0 \end{cases}$  ضابطه های تابع  $f(g(x))$  و  $g(f(x))$  را بنویسید؟

مثال (52) فرض کنید  $g(x) = x^3 - 1$  و  $f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \leq 1 \\ 4 & ; 1 < x < 3 \\ \sqrt[3]{x} & ; x > 1 \end{cases}$  تعریف شده باشد، مطلوبست محاسبه  $(fog)$ .

مثال (53) اگر  $f(x) = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 0 \\ 4 & ; x < 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x^2+2 & ; x \geq 1 \\ 2 & ; x < 1 \end{cases}$  باشد، ضابطه توابع  $fog$  و  $gof$  را بدست آورید.

مثال (54) اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & ; x > 1 \\ x^2 & ; x \leq 1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x^3 & ; x > 0 \\ 2x^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$  باشد، ضابطه تابع  $fog$  را بدست آورید.

مثال (55) اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \geq 2 \\ 3x & ; x < 2 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x-1 & ; x \geq 1 \\ x+3 & ; x < 1 \end{cases}$  باشد،  $f(g(x))$  و  $g(f(x))$  را بیابید.

مثال (56) اگر  $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq 5 \\ 3 & ; -5 \leq x < 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x+2 & ; x \geq 1 \\ x+1 & ; x < 0 \end{cases}$  باشد،  $f(g(x))$  و  $g(f(x))$  را بیابید.

مثالها

**مثال 57** توابع  $f: R \rightarrow R$  و  $g: R \rightarrow R$  با ضابطه های  $f(x) = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 0 \\ 4 & ; x < 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x^2+2 & ; x \geq 1 \\ 2 & ; x < 1 \end{cases}$  تعریف شده اند توابع  $fog$ ،  $go(-g)$  را بنویسید.

**مثال 58** تابع  $f: [0,1] \rightarrow R$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x & ; x \in Q \\ 1-x & ; x \notin Q \end{cases}$  تعریف شده است، نشان دهید به ازاء هر  $x$  از  $[0,1]$  داریم:

$$\begin{cases} f(x) + f(1-x) = 1 \\ f(f(x)) = x \end{cases}$$

**مثال 59** اگر  $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$  باشد  $f(2x^2 - 1)$  چقدر است.

**مثال 60** اگر  $f(x) = ax + b$  و  $fof$  و  $fofof$  را بیابید و نشان دهید.

**مثال 61** اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  ثابت کنید  $f(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$  و به طور کلی حدس بزنید:

$$f^n(x) = (fofo\dots of)(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

سپس این حدس را به استقرا ثابت کنید.

**مثال** ترکیب توابع زیر را بدست آورید.

62)  $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \begin{cases} D_{fof} = ? \\ (fofof)(x) = ? \end{cases}$

63)  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \\ g(x) = \tan x \end{array} \right\} f^n(g(x)) = ?$

64)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f^n(x) = ?$

مثالها

65)  $f(x) = x - [x] \Rightarrow f^n(x) = ?$

66)  $f(x) = (-1)^{[x]} \Rightarrow f^n(x) = ?$

67)  $f(x) = x - 2 \left[ \frac{x}{2} \right] \Rightarrow f^n(x) = ?$

68)  $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} \Rightarrow f^n(x) = ?$

69)  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \\ g(x) = \tan x \end{array} \right\} f^n(g(x)) = ?$

70)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_n$

71)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}} \Rightarrow f(\dots f(f(19))\dots)$  (تابع 95 بار تکرار شده است.)

72)  $f(x) = \left\{ \begin{array}{l} f : N \rightarrow N \\ 3x+1 ; x = 2n+1 \\ \frac{x}{2} ; x = 2n \end{array} \right\} (f \circ f \circ f \circ f \circ f) = ?$

**مثال 73)** کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف)  $f(x) = x^2 - 4$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  آنگاه  $(f \circ g)(5) = -25$  و  $(f \circ g)(x) = -x^2$

ب) اگر  $g(4) = 7$  ,  $f(7) = 5$  آن گاه  $(f \circ g)(4) = 35$

ج)  $g(x) = 2x - 1$  و  $f(x) = \sqrt{x}$  آن گاه  $(f \circ g)(5) = g(2)$

د) برای هر دو تابع  $f, g$  داریم:  $f \circ g = g \circ f$

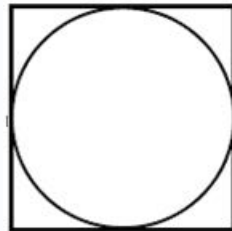
**مثال 74)** آیا سه جمله ای درجه دوم  $P(x)$  با ضرایب عددی وجود دارد، به طوری که به ازای هر عدد طبیعی که فقط با ارقام 1 نوشته

می شوند، مقدار  $P(x)$  هم تنها با ارقام 1 نوشته شود؟

مثالها

**مثال 75** قیمت معمولی یک کالا  $x$  (هزار تومان) است. اگر  $f(x) = x - 400$  و  $g(x) = 0.75x$  باشد، توصیف  $f$  و  $g$  آن است که:  
 تابع  $g(x) = 0.75x$ ، قیمت کالای  $x$  (برحسب هزار تومان) را با تخفیف 25 درصد بیان می کند.  
 تابع  $f(x) = x - 400$ ، قیمت کالای  $x$  (برحسب هزار تومان) با 400 تومان زیر قیمت اصلی، بیان می کند.  
**الف)** تابع  $f \circ g$  را محاسبه کنید.  
**ب)** تابع  $g \circ f$  را محاسبه کنید.

**مثال 76** یک پی (فونداسیون) بتنی مربع شکل به عنوان پایه ای برای یک مخزن گزوثیل استوانه ای استفاده می شود. (شکل زیر)



**الف)** شعاع مخزن،  $r$  را به عنوان تابعی از  $x$  (ضلع مربع) بنویسید.  
**ب)** مساحت  $A$  پایه دایره ای شکل را به عنوان تابعی از  $r$  بنویسید.  
**ج)**  $(A \circ r)(x)$  را بیابید و تعبیر کنید.

**مثال 77** سنگی به داخل آب یک دریاچه آرام پرتاب می شود و باعث ایجاد موج هایی به شکل دایره های هم مرکز می شود. شعاع بزرگ ترین دایره تابعی از زمان است و فرض کنید این تابع به صورت  $r(t) = 2t$  باشد.  $t$  بر حسب ثانیه است و زمان پس از برخورد سنگ با آب را نشان می دهد و  $r$  بر حسب سانتی متر است. مساحت دایره تابعی از شعاع آن است و به صورت  $A(r) = \pi r^2$  می باشد.

1- جدول زیر را کامل کنید.

|                                |   |   |         |   |   |                                  |
|--------------------------------|---|---|---------|---|---|----------------------------------|
| $t$ (زمان)                     | ۱ | ۲ | ۳       | ۴ | ۵ | $t$                              |
| $r$ (شعاع دایره در لحظه $t$ )  |   |   | ۶       |   |   | $r(t) = 2t$                      |
| $A$ (مساحت دایره در لحظه $t$ ) |   |   | $36\pi$ |   |   | $A(r(t)) = \pi(2t)^2 = 4\pi t^2$ |

۲- تابعی که مساحت دایره را در هر لحظه  $t$  به دست می دهد، چگونه از طریق دو تابع  $r(t), A(r)$  ساخته شده است؟

۳- اگر  $h(x) = (2x + 5)^2$  را به صورت ترکیب دو تابع مانند  $g, f$  بنویسید به قسمی که  $h(x) = (f \circ g)(x)$  و  $g(0) = 5$



مثال‌ها

**مثال 78)** تعداد باکتری‌ها در یک غذای منجمد با تابع  $n(d) = 20d^2 - 80d + 50$  با شرط  $2 \leq d \leq 14$  داده می‌شود که  $d$  دمای غذا است. وقتی که غذا از انجماد خارج می‌شود دما با تابع  $d(t) = 4t + 2$ ،  $0 \leq t \leq 3$  داده می‌شود که  $t$  زمان بر حسب است مطلوب است:

الف) تابع مرکب  $n(d(t))$

ب) تعداد باکتری‌ها در غذا وقتی که  $t = 2$ .

ج) پس از چه زمانی تعداد باکتری‌ها به 2420 می‌رسد؟