مثال‌ها

مثال) نامساویهای زیر را ثابت کنید .

1) $\sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|$

2) $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$; $(a,b,k>0, a<b)$

3) $\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$; $(a,b>0)$

4) $\frac{a+b}{1+ab} < 1$; $(0<b<1\ ,\ 0<a<1)$

5) $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$; $(a,b>0)$

6) $\sqrt{a}+\sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1}$

7) $\sqrt{n-k}+\sqrt{n+k} < \sqrt{n-m}+\sqrt{n+m}$; $(0<m<k<n)$

8) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 1$; $(n>1, n \in N)$

9) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-1)$

10) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ (n عدد صحیح مثبت)

11) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1} > \frac{1}{2n+1}$

12) $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$

13) $y < \frac{ax+by}{a+b} < x$; $(y<x, 0<b<a)$

14) $(a^m+b^m)^n > (a^n+b^n)^m$; $(n>m)$

مثال‌ها

15) $\frac{1}{1+2x^2} \le \frac{1}{1+x^2+x^4} \le \frac{1}{1+2x^3}$; $(0 \le x \le 1)$

16) $\sqrt[3]{43} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{49}$

17) $\frac{x^3+x}{x-1} \ge 2\left(2+\sqrt{3}\right)$; $(x > 1)$

18) $\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right) - a_1a_2\cdots a_n < n+1$; $\left(0 < a_i < 1, n > 1\right)$

19) $\sqrt{(a-b)^2+(c-d)^2} \le \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+d^2}$; $(a,b,c,d \in R)$

20) $\left(Sec^{2n}\alpha - 1\right)\left(Co\sec^{2n}\alpha - 1\right) \ge \left(1+2+\ldots+n\right)^2$

21) $\frac{a^m-b^m}{a^m+b^m} > \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$; $(m > n, a > b > 0)$

22) $\left(2-\frac{1}{n}\right)^n \ge n$; $n \in N$

23) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e)$; $(a,b,c,d,e \in R)$

24) $\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$; $(a,b,c,d > 0)$

25) $(a+b+c+d)^2 > 8(ad+bc)$; $(b > d, a > c)$

مثال‌ها

26) $\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a}\le\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\le\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$; $(a\ge b)$

27) $2>\sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}>\cdots>\sqrt[n-1]{n}>\sqrt[n]{n+1}>\cdots$

28) $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\le\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$; $(a,b,c,d>0)$

29) $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}<2$; $(a,b,c>0)$

30) $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$

31) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$; $(a>b>c>0\in R)$

32) $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\le 2$; $\left(a,b,c\in[0,1]\right)$

33) $x^2(z^2-x^2)(x^2-y^2)+y^2(x^2-y^2)(y^2-z^2)+z^2(y^2-z^2)(z^2-x^2)\le 0$; $\left(\forall x,y,z\in R\right)$

34) $a^3(b+1)+b^3(a+1)\ge a^2(b+b^2)+b^2(a+a^2)$; $(a,b>0)$

مثال‌ها

مثال35) اگر r,q,p,c,b,a اعداد حقیقی باشند به طوری‌که $ap-2bq+cr=0, ac-b^2>0$ ثابت کنید $pr-q^2\leq 0$.

مثال36) اگر $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ باشد و $d,b>0$ مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{a}{b}\leq\frac{a+c}{b+d}\leq\frac{c}{d}$.

مثال37) اگر $|y-\beta|<\varepsilon', |x-\alpha|<\varepsilon$ بطوری‌که $|\beta|>\varepsilon'$ ثابت کنید $\left|\frac{x}{y}-\frac{\alpha}{\beta}\right|\leq\frac{|\beta|\varepsilon+|\alpha|\varepsilon'}{|\beta|(|\beta|+\varepsilon')}$.

مثال38) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که سه عدد حقیقی مثبت c,b,a اندازه‌های سه‌ضلعی از مثلث باشند آن‌است که:

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$$

مثال39) اگر $a_n=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[n]{n}}}}$ باشد، ثابت کنید $1.9<\lim_{n\to\infty}a_n<2$

مثال40) اگر $a^2+b^2+ab+bc+ca<0$ آنگاه ثابت کنید $a^2+b^2<c^2$.

مثال41) اگر c,b,a طول ضلعهای یک مثلث و z,y,x طول ضلعهای مثلث ارتفاعیه باشند ثابت کنید:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geq\frac{3}{4}$$

مثال42) ثابت کنید که اگر داشته باشیم $a<\sqrt{N}<a+1$، خواهیم داشت:

$$\frac{a(a^2+3N)}{3a^2+N}<\sqrt{N}<\frac{(a+1)\left[(a+1)^2+3N\right]}{3(a+1)^2+N}$$

مثال‌ها

مثال43) ثابت کنید که اگر داشته باشیم: $a<\sqrt[3]{N}<a+1$ خواهیم داشت:

$$\frac{a(a^3+2N)}{3a^3+N}<\sqrt[3]{N}<\frac{(a+1)\left[(a+1)^3+2N\right]}{3(a+1)^3+N}$$

مثال44) ثابت کنید اگر $(i=1,2,\cdots,n)$ ، $a_i,b_i\geq 0$ ، $\sum_{i=1}^{n}b_i=1$ ، $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$ آن‌گاه $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}>1$.

مثال) کدام یک از اعداد زیر بزرگ تر است:

45) $A=31^{11}$, $B=17^{14}$

46) $A=\frac{19^{1998}+1}{19^{1999}+1}$, $B=\frac{19^{1999}+1}{19^{2000}+1}$

47) $A=\sqrt[3]{3}$, $B=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$

48) $A=\sqrt{1998}+\sqrt{2000}$, $B=2\sqrt{1999}$

49) $A=\tan\left(\frac{226}{17}\pi\right)$, $B=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{2401}{36}\right)+2$

مثال50) اگر $m<n$ آن‌گاه کدام یک از اعداد $\frac{n}{m},\frac{m}{n}$ به عدد 1 نزدیک تر است.

مثال51) اگر b,a مثبت و $n\in N$ باشد و داشته باشیم $a^{n+1}+b^{n+1}=a^{n-1}+b^{n-1}$ آن‌گاه ثابت کنید $a^2+b^2\leq 2$.

مثال52) ثابت کنید که اگر $a,b,c>0$ در نامساوی $(a^4+b^4+c^4)<2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$ صدق کند آنگاه c,b,a می‌توانند اندازه‌های اضلاع یک مثلث باشند.

مثال‌ها

مثال53) فرض می‌کنیم n کسر به صورت $\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_n}{b_n},b_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$ داریم ، ثابت کنید که کسر $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ بین بیشترین و کمترین مقدار این کسر قرار دارد.

مثال54) ثابت کنید که مجموع هر تعداد از کسرهایی که از میان دنباله $\frac{1}{2^2},\frac{1}{3^3},\frac{1}{4^4},\cdots$ انتخاب شود همواره کمتر از واحد است.

مثال55) نشان دهید که اگر a مقدار نقصانی $\sqrt{A}$ با تقریب کمتر از واحد باشد $\left(a<\sqrt{A}<a+1\right)$ آن‌گاه:

$$a+\frac{A-a^2}{2a+1}<\sqrt{A}<a+\frac{A-a^2}{2a+1}+\frac{1}{4(2a+1)}$$

مثال56) ثابت کنید $\sqrt[m+n+\cdots+p]{ab\cdots l}$ بین بیشترین و کمترین مقدار از اعداد $\sqrt[m]{a},\sqrt[n]{b},\ldots\ldots,\sqrt[p]{l}$ قرار دارد.

مثال57) فرض کنید $x^2=y^2+z^2,(x,y,z>0)$ ثابت کنید. $\quad if \quad \lambda>2\Rightarrow x^{\lambda}>y^{\lambda}+z^{\lambda}$

مثال58) ثابت کنید که اگر $m^2+n^2=1$ و $a^2+b^2=1$ آن‌گاه $|am+bn|\le 1$.

مثال59) فرض کنید که c,b,a و $b+c-a$، $a+c-b$، $a+b-c$ مثبت باشند، ثابت کنید $abc\ge(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

مثال60) فرض کنید $x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=q$ باشد، ثابت کنید:

$$\frac{p}{n}-\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}\le x_i\le\frac{p}{n}+\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}$$

مثال‌ها

مثال61) فرض کنید $x_0, x_1, \cdots, x_n$ اعداد صحیح بوده و داشته باشیم $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ ثابت کنید که هر چند جمله‌ای از درجه nام به‌صورت $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ در نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ مقادیری اختیار می‌کند که حداقل یکی از آن‌ها بزرگ تر یا مساوی $\frac{n!}{2^n}$ است.

یادآوری) اتحاد زیر همواره برقرار است:

$$f(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} \cdot f(x_0) + f(x_1)\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdots(x_1-x_n)} + \cdots + f(x_n)\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

که در آن $f(x)$ هرچند جمله‌ای از درجه n می‌تواند باشد، با مساوی قرار دادن ضرب x^n در دو طرف این تساوی داریم:

$$1 = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)\cdots(x_1-x_n)} + \cdots + \frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

مثال62) فرض کنید n عدد $l, \cdots, c, b, a$ اعداد حقیقی مثبت بوده و q, p دو عدد حقیقی باشند.ثابت کنید که اگر q, p هم‌علامت باشند آنگاه:

$$n(a^{p+q} + b^{p+q} + \cdots + l^{p+q}) \geq (a^p + b^p + \cdots + l^p)(a^q + b^q + \cdots + l^q)$$

مثال63) اگر $0 < a < 1$ ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی مانند n داریم $0 < a^n < 1$.

مثال64) اگر $0 < a < 1$ و n, m دو عدد صحیح باشند به طوری که $m < n$ ، ثابت کنید $a^m > a^n$.

مثال65) کسری با کوچک ترین مخرج ممکن پیدا کنید که از $\frac{1}{1991}$ بزرگ تر و از $\frac{1}{1990}$ کوچک تر باشد.

مثال66) ثابت کنید اگر $2x + 5y = 10$ آنگاه $3xy - x^2 - y^2 < 7$ است.

مثال67) min عبارت $x^4+y^4-4x^2+6y^2+15$ را به‌دست آورید.