

مثالها

مثال) نامساوی های زیر را ثابت کنید.

$$1) \begin{cases} \text{if } a > 0, a + \frac{1}{a} \geq 2 \\ \text{if } a < 0, a + \frac{1}{a} \leq -2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a^2 + b^2 \geq ab & (I) \\ a^2 + b^2 + ab \geq 0 & (II) \\ a^2 + b^2 \geq 2ab & (III) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} & a, b > 0 & (I) \\ a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc & (II) \end{cases}$$

$$4) \text{ if } a + b + c \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

$$5) \begin{cases} \text{if } n \in \mathbb{N} \Rightarrow k(n-k+1) \geq n, 1 \leq k \leq n & (I) \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} : 3(ab+ac+bc) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) & (II) \end{cases}$$

$$6) \forall a^2 = b^2 + c^2, (a, b, c > 0) \Rightarrow \begin{cases} \text{if } n > 2 \Rightarrow a^n > b^n + c^n & (I) \\ \text{if } 0 < n < 2 \Rightarrow a^n < b^n + c^n & (II) \end{cases}$$

$$7) \text{ if } n \in \mathbb{N}, (a, b > 0) \Rightarrow \begin{cases} a^n + b^n \geq a^{n-1} \cdot b + b^{n-1} \cdot a & (I) \\ a^n + b^n \geq ab(a^{n-2} + b^{n-2}) & (II) \end{cases}$$

$$8) (a < b) \text{ نامساوی برنولی: } \begin{cases} (1+a)^n \leq 1+na, 0 < n < 1 \\ (1+a)^n \geq 1+na, n < 0 \vee n > 1 \end{cases}$$

$$9) \text{ if } x + y = k > 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x^n + y^n \geq \frac{k^n}{2^{n-1}}$$

مثالها

$$10) \forall a, b \in \mathbb{R}: \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ یا } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$11) \text{ if } a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \Rightarrow (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$12) \forall a_i, b_i \in \mathbb{R} : (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

$$13) \begin{cases} \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ \text{if } a_1 a_2 \dots a_n = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \end{cases}$$

$$14) \text{ if } a > b > 0 \xrightarrow{x>0} a^x > b^x$$

مثال) نامساویهای زیر را ثابت کنید .

$$15) \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$16) ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c) \geq 6abc \quad ; \quad (a, b, c > 0)$$

$$17) a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{n(a_1^2 + \dots + a_n^2)}$$

مثالها

$$18) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} ; (a,b,c > 0)$$

$$19) \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c ; (a,b,c > 0)$$

$$20) \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} ; (x > 0)$$

$$21) \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} ; a,b > 0$$

$$22) \sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} ; (n \in \mathbb{N}, n! = 1 \times 2 \times \dots \times n)$$

$$23) a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{2}[bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b)] ; (a,b,c > 0)$$

$$24) \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

$$25) \frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4$$

$$26) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{x+1} ; (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+)$$

مثالها

$$27) \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad ; \quad (-1 < \alpha < 0)$$

$$28) \frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q} \quad (x \neq 1, p > q \text{ و } p, q \text{ صحیح و } q, p, x \text{ اعداد مثبت})$$

$$29) mx^{m-1}(x-1) > x^m - 1 > m(x-1) \quad (x > 0, 1 \neq x \text{ و } m \text{ گویا و } m \text{ بین } 1 \text{ و } 0 \text{ نیست})$$

$$30) \frac{x^n}{x^{3n} + 2} \leq \frac{1}{3} \quad (x > 0, n \in N)$$

$$31) \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

مثال 32) اگر $a + b = 2$ ثابت کنید، $a^4 + b^4 \geq 2$.

مثال 33) min عبارت $y = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x^2 - 4}}$ را به دست آورید. ($|x| > 2$)

مثال 34) اگر $y = x + \frac{1}{x-3}$ باشد حدود y را پیدا کنید. ($x \neq 3$)

مثال 35) min عبارت $y = \frac{4x^2 - 8}{\sqrt{x^2 - 3}}$ را به دست آورید. ($|x| > \sqrt{3}$)

مثال 36) اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ و $S = ab + bc + ac$ ، حدود S را مشخص کنید.

مثال‌ها

مثال 37) اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ و $S = a + b + c$ ، حدود S را مشخص کنید.

مثال 38) اگر x, y, z مثبت و $x + y + z = k$ ، کمترین عبارت $S = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ را به دست آورید. ($k > 0$)

مثال 39) max و min عبارت $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ را تعیین کنید.

مثال 40) اگر $ab > 0$ ، $S = (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - 4$ حدود S را پیدا کنید.

مثال 41) اگر $A = (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ باشد، min عبارت A را به دست آورید.

مثال 42) اگر $y = \frac{x^2}{1 + x^4}$ باشد، max عبارت y را به دست آورید. ($x \neq 0$)

مثال 43) اگر $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ و $x, y, z > 0$ باشد ثابت کنید $x + y + z \leq 3$.

مثال 44) اگر x, y, z اعداد مثبت و $xyz(x + y + z) = 1$ باشد min عبارت $(x + y)(y + z)$ را پیدا کنید.

مثال 45) ثابت کنید اگر $a, b > 0$ ، $a + b = 1$ آنگاه $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

مثال 46) اگر قطر مکعب مستطیلی 10 باشد، max سطح کل آن را به دست آورید.

مثال 47) اگر $ac + bd = pq$ و تمام آن‌ها مثبت باشند، ثابت کنید $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq p^2 q^2$.

مثال 48) فرض کنید $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ و n عدد صحیح مثبت است، ثابت کنید $u_{n+1} > u_n$.