مثال‌ها

مثال) نامساویهای زیر را ثابت کنید.

1) $(a^4+b^4+c^4)(ab+ac+bc)\geq 9a^2b^2c^2 \quad ; \quad a,b,c>0$

2) $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc \quad ; \quad (a,b,c>0)$

3) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad ; \quad (n\in N)$

4) $\left(\sqrt{2!}-1\right)\left(\sqrt[3]{3!}-\sqrt{2!}\right)\cdots\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)<\frac{n!}{(n+1)^n}$

5) $a^3+b^3+c^3\geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab} \quad ; \quad (c,b,a\geq 0)$

6) $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c) \quad ; \quad (a,b,c\geq 0)$

7) $\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leq\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n) \quad ; \quad (a_1,a_2,\ldots,a_n\geq 0)$

8) $\frac{(n+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1}<m^\alpha+(m+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha<\frac{n^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

9) $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}$ ($p,n\geq 1$ و n و p اعداد صحیح مثبت)

10) $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}} \quad ; \quad (n>1)$

11) $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad ; \quad (n>1)$

12) $2\sqrt[a+b]{a^{2b}\cdot b^{2a}}\leq a^2+b^2 \quad ; \quad (a,b\in N)$

مثال‌ها

13) $\dfrac{a+nb}{n+1} > \sqrt[n+1]{ab^n} \quad ; \quad (n \in N)$

14) $\dfrac{nNa}{a^n+(n-1)N} < \sqrt[n]{N} < \dfrac{(n-1)a^n+N}{na^{n-1}}$

15) $\sqrt[3]{(a+k)(b+l)(c+m)} \geq \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{klm} \quad ; \quad (a,b,c,k,l,m>0)$

16) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$

17) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c} \quad ; \quad (a,b,c>0)$

18) $a^{\frac{a}{a+b+c}} b^{\frac{b}{a+b+c}} c^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \dfrac{1}{3}(a+b+c)$ اعداد صحیح مثبت (c,b,a)

19) $a^n - 1 \geq n\left(a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}}\right)$ ($n,a>1$ عدد صحیح مثبت)

20) $\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n} \quad ; \quad a_i, b_i > 0, i=1,2,\cdots$

21) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{y}} \geq \dfrac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}} \quad ; \quad x,y>0$

22) $\dfrac{1}{1-a^2} + \dfrac{1}{1-b^2} \geq \dfrac{2}{1-ab}$

23) $\left(\dfrac{a+b}{c}\right)^n + \left(\dfrac{b+c}{a}\right)^n + \left(\dfrac{c+a}{b}\right)^n \geq 3\times 2^n \quad ; \quad (a,b,c>0 \quad n\in N)$

مثال‌ها

24) $(a_1^2+a_1+1)(a_2^2+a_2+1)\cdots(a_n^2+a_n+1)\geq\left(\dfrac{3n}{\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\right)^n$

25) $n(\sqrt[n]{n!}-1)<(n-1)\sqrt[n-1]{(n-1)!}\qquad ;\qquad (n>2, n\in N)$

26) $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{y^4+x^2}\leq\dfrac{1}{xy}\qquad ;\qquad (x,y>0)$

27) $\dfrac{(a+b+c)^2}{3}\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}\qquad ;\qquad (a,b,c\geq 0)$

مثال28) نامساوی مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی را در حالتهای $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=6$ ثابت کنید.

مثال29) اگر $a,b,c>0, a+b+c=6$ آنگاه ثابت کنید $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq\frac{75}{4}$.

مثال30) اگر S مساحت و p نصف محیط یک چهارضلعی محاطی باشند، ثابت کنید $S\leq\frac{p^2}{4}$.

مثال31) اگر x, y, z مثبت و $x+y+z=\frac{3}{4}$ ، ثابت کنید $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geq 125$.

مثال32) $a_1, a_2, \cdots$ را دنباله‌ای از عددهای غیرمنفی فرض می‌کنیم، G_n واسطه هندسی و n جمله اول این دنباله است، ثابت کنید:

$$nG_n-(n-1)G_{n-1}\leq a_n$$

مثال33) اگر $x+y+z=15$ باشد ثابت کنید $x^2+y^2+z^2\geq 15$.

مثال34) $a^2+b^2+c^2+d^2=25$, $a+b+c+d=8$, $c=d$، بیشترین مقدار c را پیدا کنید و به ازای آن مقدار a را محاسبه کنید.

مثال35) اگر حجم مکعب مستطیل مقدار ثابت 64 باشد، در چه صورت سطح کل آن کمترین است؟

مثال‌ها

مثال36) اعداد حقیقی مثبت و معلومی هستند، اگر c,b,a $y=\dfrac{ax^{2n}+b}{cx^n}$ با شرط $x>0$ باشد، کمترین مقدار y را پیدا کنید.

مثال37) اگر $b^2x^2+a^2y^2=c^2$ و c,b,aاعداد حقیقی مثبت و y,x متغیرهای مثبتی باشند، بیشترین مقدار xy را به‌دست آورید.

مثال38) اگر $x_1x_2x_3=1$ ، $x_1,x_2,x_3>0$ باشند، min عبارت $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)$ را به‌دست آورید.

مثال39) از میان تمام مکعب مستطیلهایی که مجموع سه بُعد آن‌ها داده شده است، آن را بیابید که حجم ماکزیمم را داشته باشد.

مثال40) b,a اعداد غیرمنفی و α زاویه‌ای حاده است، کمترین مقدار عبارت $y=a\tan\alpha+b\cot g\alpha$ چقدر است؟

مثال41) اگر $a+b+c+d=1$ و d,c,b,aنامنفی باشند، ثابت کنید:

$$(1+a+b)(1+b+c)(1+c+d)(1+d+a)\geq 16(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$$

مثال42) اگر $x^3y=at^2+bt^4$ ،$t\geq x$، y,x,b,a مثبت باشند ثابت کنید $y\geq 2\sqrt{ab}$.

مثال43) اگر c,b,a مثبت و $a^2+b^2+c^2=1$ ثابت کنید $b(a+c)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

مثال44) اگر c,b,a سه عدد حقیقی مثبت باشند به طوری‌که $abc=x^3$، ثابت کنید $(1+a)(1+b)(1+c)\geq(1+x)^3$.

مثال45) فرض کنید n عدد $l,\cdots,c,b,a$ اعداد مثبتی باشند به‌طوری‌که $S=a+b+\cdots+l$، ثابت کنید:

$$\frac{S}{S-a}+\frac{S}{S-b}+\cdots+\frac{S}{S-l}\geq\frac{n^2}{n-1}$$

مثال46) ثابت کنید اگر c,b,aمثبت و گویا باشند به‌طوری‌که مجموع هر دو تای آن‌ها از سومی بیشتر باشد در این‌صورت:

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c\leq 1$$

مثال47) ثابت کنید:

1) $(1+\alpha)^\lambda>1+\alpha\lambda$ که αعددی مثبت دلخواه و $\lambda>1$ و گویا است.

2) $(1+\alpha)^\lambda<\dfrac{1}{1-\alpha\lambda}$ که $\alpha>0$ و حقیقی و گویا و مثبت و $\alpha\lambda<1$.

مثال48) اگر $y=\dfrac{x^2}{x^4+25}$، نشان دهید $0\leq y\leq\dfrac{1}{10}$.

مثال‌ها

مثال49) فرض کنید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

که در آن $a_{ij}>0$ و گویا هستند و $x_i>0$ به علاوه داشته باشیم :

$$a_{k_1}+a_{k_2}+\cdots+a_{k_n}=1, a_{1k}+a_{2k}+\cdots+a_{nk}=1 \quad ; \ (k=1,\cdots,n)$$

ثابت کنید:

$$y_1y_2\cdots y_n \ge x_1x_2\cdots x_n \quad , \quad a_i>0, b_i>0, (i=1,2,\cdots,n)$$

مثال50) اگر c,b,a مقادیر مثبتی باشند آن‌گاه min عبارت زیر را پیدا کنید.

$$A=\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right)$$

مثال51) اگر $x^2+y^2+z^2=12$ باشد ثابت کنید $x^3+y^3+z^3\ge 24$.

مثال52) نامساوی $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \le \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ را ثابت کنید.

مثال53) نامساوی $\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^k \le \left(\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}\right)$ ا ثابت کنید. (n,k اعداد صحیح مثبت و $k>1, x_i>0$)