

مثالها

مثال (1) ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x[x] + 4}{[-x] - 3} = \frac{-4}{3}$

مثال (2) ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = -4$

مثال () با استفاده از تعریف حد ، حدود زیر را تعریف کنید.

3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

4) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

5) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

6) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

10) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$

11) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

مثال () درستی تساوی های زیر را با استفاده از تعریف حد ثابت کنید :

12) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 1) = 11$

13) $\lim_{x \rightarrow a} (mx + n) = ma + n$

14) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

15) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = 7$

16) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 + x - 1) = 17$

17) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{(x - 2)^2} = +\infty$

18) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{(x - 2)^2} = +\infty$

19) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4}{(x - 1)^2} = -\infty$

20) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{x^2} = 4$

21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1$

22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = +\infty$

23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + x - 1) = +\infty$

24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt[4]{x^4 + 1}) = -\infty$

25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x^2 - 6x + 2}) = -\infty$

26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x) = \infty$

مثالها

27) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2} = 3$

28) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x + 1) = +\infty$

29) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2) = -\infty$

30) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$

31) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2x - 4} = 0$

32) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x - 5} = +\infty$

33) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$

34) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x - 2} = +\infty$

35) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

36) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

37) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$

38) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$

39) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 1} = 0$

40) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2 - 4} = -\infty$

41) $\lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{x + 3}{x - 2} \right| = +\infty$

42) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} + \sin x\right) = +\infty$

43) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0$

44) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 5) = 7$

45) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

46) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 - 4} = -\infty$

47) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{x} \cdot \cos^3 \frac{1}{x^2} = 0$

48) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} = 4$

مثال (49) اگر $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ باشد، ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{7}$.

مثال (50) اگر $f(x) = x \left[\frac{1}{x} \right]$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ را حدس زده و آن را با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

مثال (51) در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{(3x+1)(x-1)}{(x-1)}$: $|f(x) - 4| < \frac{3}{1000}$ if $0 < |x - 1| < \alpha \Rightarrow$

آنگاه α را بدست آورید.

مثالها

مثال 52) تعریف $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ کدام است؟

$$\exists M > 0 \forall N > 0, x < -N \Rightarrow f(x) < -M \quad (2) \quad \forall N > 0 \exists M > 0, x < +M \Rightarrow f(x) < -N \quad (1)$$

$$\forall M > 0 \exists N > 0, x < -N \Rightarrow f(x) < -M \quad (4) \quad \exists N > 0 \forall M > 0, x < -N \Rightarrow f(x) < -M \quad (3)$$

مثال 53) فرض کنیم اگر $x > N$ آنگاه $f(x) = \frac{x}{3} + \sin x > M$ کدام همواره صحیح است؟

$$x > 33 \Rightarrow f(x) > 11 \quad (2) \quad x > 10 \Rightarrow f(x) > 30 \quad (1)$$

$$x > 30 \Rightarrow f(x) > 10 \quad (4) \quad x > 33 \Rightarrow f(x) > 12 \quad (3)$$

مثال 54) اگر: $0 < |x - 1| < \alpha \Rightarrow \frac{1}{(x - 1)^4} > 10^8$

آنگاه α چقدر است؟

مثال 55) اگر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{1000}$ ، کدام گزینه همواره صحیح است؟

(1) همواره $f(x) > 0$.

(2) $f(x)$ همواره هم مثبت و هم منفی است.

(3) یک همسایگی محذوف صفر وجود دارد که همواره به ازای هر x از آن $f(x) > 0$.

(4) به ازای هر همسایگی محذوف صفر همواره $f(x) < 0$.

مثال 56) اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، آنگاه همواره کدام درست است؟

(1) فاصله $(a, +\infty)$ وجود دارد که به ازای هر x از آن $f(x) > 0$.

(2) فاصله $(a, +\infty)$ وجود دارد که به ازای هر x از آن $f(x) < 0$.

(3) فاصله $(a, +\infty)$ وجود دارد که به ازای هر x از آن $f(x)$ هم بزرگتر و هم کوچکتر از صفر است.

(4) فاصله $(a, +\infty)$ وجود دارد که به ازای هر x از آن $f^2(x) \geq 0$.

مثال‌ها

مثال 57) اگر: $1 < x < 1 + \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} > 10$

آنگاه α چقدر است؟

مثال 58) به فرض معلوم بودن $\varepsilon > 0$ ، اگر: $t > M \Rightarrow \left| \frac{t^2 + t}{t^2 - 1} - 1 \right| < \varepsilon$

عدد M چقدر است:

مثال 59) اگر $f(x) = \frac{x}{x-3}$ و $|f(x)| > 1000$ باشد، حدود تغییرات x چیست؟

مثال 60) بزرگترین مقدار δ در نامساوی $0 < |x-1| < \delta$ به ازای $\frac{(-1)^{[x]}}{x-1} < -1000$ را بدست آورید.

مثال 61) در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} & ; x > 1 \\ 5x - 2 & ; x \leq 1 \end{cases}$ ، اگر $0 < |x-1| < \delta$ و فاصله $f(x)$ از عدد 3 کمتر از (0.01) باشد، آنگاه

بزرگترین مقدار δ را بیابید.