

## مثالها

مثال) تساوی‌های زیر را در حوزه حساب و جبر به روش استقراء ثابت کنید.

$$1) 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in N$$

$$2) 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3) 2+6+10+\dots+(4n-2) = 2n^2$$

$$4) (1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$5) 2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$$

$$6) 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

$$7) 1^3+2^3+\dots+n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$8) 1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7 + \dots + n(2n+1) = \frac{4n^3 + 9n^2 + 5n}{6}$$

$$9) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$10) 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$$

مثالها

$$11) 5 + 9 + 13 + \dots + (4n + 1) = n(2n + 3)$$

$$12) 1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!) = (n + 1)! - 1$$

$$13) \frac{1}{3 \times 8} + \frac{1}{8 \times 13} + \dots + \frac{1}{(5n - 2)(5n + 3)} = \frac{n}{3(5n + 3)}$$

$$14) \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n + 2}{2^n}$$

$$15) \forall n, k \in \mathbb{N} ; \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

$$16) 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$17) 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} = \frac{3(2^n - 1) - 2n}{2^{n-1}}$$

$$18) 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \neq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$19) 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)(x-2) \dots (x-n)}{n!}$$

$$20) 1 + \sum_{i=1}^n i(i!) = (n + 1)!$$

## مثال‌ها

مثال 21) مجموع جمله  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$  را حدس بزنید و ادعای خود را با روش استقراء ریاضی ثابت کنید.

مثال 22) به کمک استقراء ثابت کنید که هرگاه  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد آنگاه  $A^n = \begin{bmatrix} 1+n & -n \\ n & 1-n \end{bmatrix}$  است؟ ( $n$  عدد طبیعی است).

مثال 23) ثابت کنید  $\binom{n}{t}$  برای اعداد طبیعی  $n, 0 \leq t \leq n$  همیشه عدد طبیعی است. (پاسکال)

مثال) مسائل زیر را در حوزه نظریه اعداد به روش استقراء ثابت کنید.

$$24) \forall n \in \mathbb{N}; 6 \mid n^3 + 5n$$

$$25) \forall n \in \mathbb{N}; 5 \mid 4^{2n} - 1$$

$$26) 2^{2n} + 15n - 1 = 9t, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$27) \forall n \in \mathbb{N}; 6^{2n} - 1 = 35t$$

$$28) \forall n \in \mathbb{N}; 6^{2n+2} - 5^{2n+2} = 11t$$

$$29) 8^n - 1 = 7t; n \in \mathbb{N}$$

$$30) a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

مثالها

$$31) A_n = \left[ \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right] \in N$$

**مثال 32)** ثابت کنید که مجموع مکعبات سه عدد صحیح متوالی بر 9 قابل قسمت است .

**مثال 33)** ثابت کنید به ازاء هر عدد صحیح  $n \geq 1$   $A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$  بر 133 قابل قسمت است .

**مثال)** تساوی‌های زیر را در حوزه **مثلثات** به روش استقراء ثابت کنید.

$$34) \cos \alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos (2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha} \quad (n \in N)$$

$$35) \text{ if } x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha \Rightarrow x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha$$

**مثال)** نامساویها زیر را به روش استقراء ثابت کنید.

$$36) (2n)! < 2^{2n} (n!)^2 \quad n \in N$$

$$37) a < b \Rightarrow a^n < b^n \quad (a, b > 0, n \in N)$$

$$38) \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

$$39) \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$40) 2^{\left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]} > n! \quad , n \in N$$

مثالها

41)  $\forall n \in N ; |\sin nx| \leq n |\sin x|$

42)  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

43)  $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

44)  $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$   $x_i$  ها همه هم علامت هستند

45)  $\forall x, y \in R ; x + y \geq 0 , \forall n \in N ; \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}$

46)  $\prod_{k=1}^n (2k-1) \leq n^n$

47)  $\forall n \in N ; (n)^{n!} \geq (n!)^n$

48)  $\forall n \in N ; 2! \times 4! \times \dots \times (2n)! \geq [(n+1)!]^n$

49)  $\forall m, n \in N ; (m+n)! \geq m! + n!$

50)  $1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$

## مثال‌ها

51)  $2^n \geq n + 1$

**مثال 52)** اگر  $a \geq -1$  و  $n \in \mathbb{N}$  و  $x + y \geq 0$  به کمک استقراء ریاضی درستی رابطه  $(1+a)^n \geq 1+na$  ( $a \geq -1$ ) ثابت کنید.

**مثال)** تساوی‌های زیر را در حوزه **جبر مقدماتی** به روش استقراء ثابت کنید.

53)  $(x^n)' = nx^{n-1}$

54)  $\log x^n = n \log x$

**مثال)** مسائل زیر را در حوزه **هندسه** به روش استقراء ثابت کنید.

55) ثابت کنید که اگر  $n$  صفحه از یک نقطه عبور کنند که هیچ سه صفحه ای در یک خط مشترک نباشند، فضا را به  $A_n = n(n-1) + 2$  قسمت تقسیم می کنند.

56) ثابت کنید  $n$  خط مختلف که در یک صفحه واقع باشند و از یک نقطه عبور کنند، صفحه را به  $2n$  قسمت تقسیم می کنند.