

مثال‌ها

مثال 2) وارون ماتریس $\lambda I_{n \times n}$ را پیدا کنید. ($\lambda \neq 0, \in R$)

مثال 3) فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ وارون پذیر و $\lambda \neq 0$ آنگاه ثابت کنید λA وارون پذیر است و $(\lambda A)^{-1}$ را بیابید.

مثال 4) نشان دهید ماتریس $4I$ وارون پذیر است و وارون آن را به دست آورید.

مثال 5) اگر B ماتریس مربعی باشد و AB یک مضرب غیر صفر، ماتریس همانی باشد، نشان دهید $AB = BA$.

مثال 6) هرگاه $A^2 = A$ و $\lambda \neq 1$ باشد ثابت کنید: $(I_n - \lambda A)^{-1} = I_n + \frac{\lambda}{1-\lambda} A$

مثال 7) اگر $A_{n \times n}$ ماتریس متعامد باشد ($AA' = A'A = I$) آنگاه ثابت کنید $A' = A^{-1}$ و $|A| = \pm 1$.

مثال 8) هرگاه A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه و $A+B=AB$ و A ماتریس وارون پذیر باشد، ثابت کنید ماتریس B وارون پذیر بوده و $A^{-1} + B^{-1} = I$ است.

مثال 9) هرگاه A ماتریس مربع و A^4 مساوی صفر باشد، ثابت کنید ماتریس $I - A$ وارون پذیر بوده و وارون آن را بیابید.

مثال 10) هرگاه ماتریس A در معادله $\alpha A^2 + \beta A + \lambda I = \bar{0}$ صادق باشد و $\lambda \neq 0$ باشد، وارون A را محاسبه نمایید.

مثال 11) اگر A ماتریسی باشد به طوری که $A^3 - 2A^2 + 5A - I = 0$ در این صورت ثابت کنید A وارون پذیر است و وارون A را به دست آورید.

مثال 12) اگر P ماتریسی وارون پذیر باشد، نشان دهید: $|P^{-1}AP - \lambda I| = |A - \lambda I|$

مثال 13) اگر A یا B دو ماتریس وارون پذیر و هم مرتبه باشند، ثابت کنید: $|AB - \lambda I| = |BA - \lambda I|$

مثال‌ها

مثال 14) فرض کنید A ماتریسی وارون پذیر است و برای ماتریسی مانند B ماتریس های $A+B$ و $A-B$ نیز وارون پذیر باشند، ثابت کنید:

مثال 15) فرض کنید A ماتریسی متقارن و وارون پذیر و B ماتریسی پادمتقارن و $A \pm B$ وارون پذیر است.

$$\text{اگر قرار دهیم } M = (A+B)^{-1}(A-B) \text{ نشان دهید } M'AM = A$$

مثال 16) فرض کنید A یک ماتریس پوچ توان با اندیس n است (یعنی A ماتریسی است به طوری که $A^n = 0$ ولی $A^{n-1} \neq 0$) ثابت کنید $I - A$ وارون پذیر است.

مثال 17) اگر X و Y دو ماتریس مربع باشند و داشته باشیم $X+Y = XY$ ثابت کنید که اگر X وارون پذیر باشد، آنگاه Y نیز وارون پذیر است و $X^{-1} + Y^{-1} = I$

مثال 18) فرض کنید A ماتریس وارون پذیری است به طوری که $A^2 - A^{-1} - A + I = \bar{0}$ در این صورت A^{-1} کدام است؟

$A^2 - A - I$ (4) $A^2 - A$ (3) $A^2 - A + I$ (2) $A^2 + I$ (1)

مثال 19) اگر $A^3 = 2I$ در این صورت وارون $A - I$ را به دست آورید.

مثال 20) اگر A و B ماتریسهای وارون پذیر باشند، ثابت کنید A^{-1} و B تعویض پذیرند. (A و B تعویض پذیرند)

مثال 21) اگر تمام وارون ها وجود داشته باشند، رابطه زیر را ثابت کنید: $(C^{-1} + D^{-1})^{-1} = C(C + D)^{-1}D$

مثال 22) اگر همه وارونها موجود باشند آنگاه $C^{-1}D(I + D'C^{-1}D)^{-1}$ را بیابید.

مثال 23) اگر A و B و C ماتریسهای $n \times n$ و وارون پذیر باشند، عبارت $(A^{-1}B)^{-1}(C^{-1}A)^{-1}(B^{-1}C)^{-1}$ کدام است؟

$2I$ (4) I (3) $(ABC)^{-1}$ (2) ABC (1)

مثالها

مثال 24) اگر A و B مربعی معکوس پذیر و $|A+B| \neq 0$ کدام درست است؟

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1} \quad (1) \quad (A+B)^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1} \quad (3)$$

$$(A+B)^{-1} = A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}B^{-1} \quad (4) \quad (A+B)^{-1} = B^{-1}(A+B)A^{-1} \quad (2)$$

مثال 25) اگر A و B وارون پذیر باشند و $A^2B = AB^2$ آنگاه:

$$A = B \quad (4) \quad A = -B \quad (3) \quad A^{-1} = B \quad (2) \quad AB = I \quad (1)$$

مثال 26) کدامیک همواره صحیح است؟

- 1) اگر $A^2 = A$ و A وارون پذیر نباشد، $A = 0$
- 2) اگر $A^2 = 0$ آنگاه $A = 0$
- 3) اگر $A^2 = A$ و A وارون پذیر باشد $A = I$
- 4) اگر A وارون پذیر نباشد، آنگاه $A + A'$ وارون پذیر نمی باشد.

مثال 27) اگر A ماتریس 3×3 و $A^3 = -2I$ آنگاه $|A^{-1}|$ را بیابید.

مثال 28) اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ و B وارون پذیر باشد و $\lambda \in R$ آنگاه $|AB - \lambda I|$ برابر است با:

$$|A||B| - \lambda \quad (4) \quad |BA + \lambda I| \quad (3) \quad |A||B| \quad (2) \quad |BA - \lambda| \quad (1)$$

مثال 29) اگر B ماتریس $n \times n$ و وارون پذیر و $\lambda \in R$ به ازای هر ماتریس A از مرتبه $n \times n$ ، $|B^{-1}AB - \lambda I|$ کدام است؟

$$|B||A - \lambda I| \quad (4) \quad |AB - \lambda I| \quad (3) \quad |A - \lambda I| \quad (2) \quad |B - \lambda I| \quad (1)$$

مثال 30) اگر A و B دو ماتریس مربع وارون پذیر و $A+B = AB$ آنگاه $A^{-1} + B^{-1}$ برابر کدام است؟

$$AB \quad (4) \quad (AB)^{-1} \quad (3) \quad (A+B)^{-1} \quad (2) \quad I \quad (1)$$

مثالها

مثال 31) کدام همواره صحیح نیست؟

1) اگر $A = A^{-1}$ آنگاه $|A| = \pm 1$

2) اگر $A' = A^{-1}$ آنگاه $|A| = \pm 1$

3) اگر A وارون پذیر و $A^2 = A$ آنگاه $|A| = 1$

4) اگر $A_{n \times n}$ ماتریس پادمتقارن باشد ($A' = -A$) آنگاه $|A| = 0$