

مثالها

مثال) تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

$$21) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$22) (A^{-1})' = (A')^{-1}$$

$$23) (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}, (A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

$$24) |A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$$

$$25) |A X A^{-1}| = |X| \quad (X \text{ ماتریسی هم مرتبه با } A \text{ می باشد.})$$

$$26) (C^{-1} A C)^n = C^{-1} A^n C \quad (A \text{ و } C \text{ دو ماتریس مربع و هم مرتبه و } C \text{ وارون پذیر})$$

$$27) (K A)^{-1} = \frac{1}{K} A^{-1}, (K I)^{-1} = \frac{1}{K} I$$

$$28) (A^{-1})^n = (A^n)^{-1} = A^{-n}$$

مثال 29) فرض کنید $BB' = B'B$ و $C = B^{-1}B'$ در این صورت $(CC')^{-1}$ را بدست آورید.

مثال 30) A ماتریس متقارن و B پادمتقارن است و $AB = BA$ و $A+B$ وارون پذیر است. اگر $C = (A+B)^{-1}(A-B)$ باشد ثابت کنید $CC' = C'C = I$ (متعامد)

مثال 31) هرگاه A و B دو ماتریس وارون پذیر و تعویض پذیر باشد، ثابت کنید ماتریسهای A', B' و A^{-1}, B^{-1} تعویض پذیر هستند.

مثال 32) اگر A و B متقارن و وارون پذیر باشد تعویض پذیر، نشان دهید که AB و $A^{-1}B$ متقارن است.

مثال‌ها

مثال 33) فرض کنید A و B ماتریسهای وارون پذیر باشند، حاصل $B^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}B^{-1}$ را بیابید.

مثال 34) اگر P و Q و R سه ماتریس $n \times n$ و وارون پذیر باشند، $PQR = I$ آنگاه Q^{-1} را بیابید.

مثال 35) اگر A, B دو ماتریس معکوس پذیر و هم مرتبه باشند و $B = rA + sI$ باشد آنگاه $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

مثال 36) اگر A ماتریس متقارن و وارون پذیر باشد A^{-1} متقارن است.

مثال 37) اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و متقارن و وارون پذیر باشند آنگاه $(B^{-1}A^{-1})'(BAB^{-1})'$ را بدست آورید.

مثال 38) فرض کنید A و B ماتریسهای متقارن و هم مرتبه هستند، در این صورت $(BAB^{-1})'$ را به دست آورید.

مثال 39) اگر A ماتریس پادمتقارن و وارون پذیر باشد A^{-1} پادمتقارن است.

مثال 40) اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد در این صورت $|A^{-1} - I|$ برابر است با

$$\frac{1}{|A|}|A + I| \quad (4) \qquad |I + A| \quad (3) \qquad \frac{1}{|A|}|I - A| \quad (2) \qquad |I - A| \quad (1)$$

مثال 41) اگر $A^{-1} = 2A^2$ و A ماتریسی 3×3 باشد $|A|$ را بیابید.

مثال 42) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ در این صورت دترمینان $|A^{-1}|$ را بدست آورید؟

مثال 43) اگر P ماتریس وارون پذیر و $B = PAP^{-1}$ نشان دهید $|B| = |A|$

مثالها

مثال 44) اگر $A_{n \times n}$ ماتریس وارون پذیر و $A^{-1} = \lambda A^{n-1}$ ($n \geq 3$ عدد طبیعی فرد) کدام است؟

- (1) λ^n (2) $\lambda |A|^n$ (3) $\frac{1}{\lambda}$ (4) $\frac{1}{\lambda^n}$

مثال 45) اگر A ماتریس $n \times n$ و وارون پذیر باشد، آنگاه $|I + A^{-1}|$ کدام است؟

- (1) $|A + I|$ (2) $|A||A + I|$ (3) $\frac{1}{|A|}|A + I|$ (4) $\frac{1}{|A|}|A - I|$

مثال 46) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه $|A^{-1}|$ را بیابید.

مثال 47) اگر A و B ماتریسهای $n \times n$ و $|A| = 2$ و $|B| = -3$ آنگاه $|A^{-1}B'|$ چقدر است؟

مثال 48) اگر P و A ماتریس $m \times m$ و ماتریس P وارون پذیر باشد با استقرا ثابت کنید به ازاء هر n متعلق به اعداد طبیعی داریم:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

مثال 49) اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ باشد در این صورت $(8AB)^{-1}$ را بیابید.

مثال 50) اگر $A^2 = A$ و $B^2 = B$ و A و B وارون پذیر باشند، در این صورت $(A+B)^{-1}$ کدام است؟

مثال 51) از معادله $2AXBC = I$ ماتریس X را بیابید. (A و B و C ماتریسهای وارون پذیرند).

مثال 52) اگر A ماتریس 3×3 و $|A| = -7$ آنگاه $|(2A)^{-1}|$ را بیابید.